Dirección General de Telebachillerato

Cálculo diferencial

Alain Ávila Zayas
Cointo García Guevara
Jorge Alberto Contreras Cid

GOBIERNO DEL ESTADO DE VERACRUZ

Norma Rocío Nahle García
Gobernadora del Estado de Veracruz

Claudia Tello Espinosa
Secretaria de Educación de Veracruz

David Agustín Jiménez Rojas
Subsecretario de Educación Media Superior y Superior

Dirección General de Telebachillerato

Director General
Irving Ilhuicamina Mendoza Ruiz

Subdirectora Técnica
Piedad Alcira Hernández Pérez

Jefe del Departamento Técnico Pedagógico
Noel Abraham Velázquez Viveros

Jefa de la Oficina de Planeación Educativa
Ana Flora Angulo Morales

Equipo editorial

Coordinación editorial
Mauro Morales Arellano

Asesoría académica
Amalia Ysabel Jiménez Abud

Asesoría pedagógica
Gonzalo Jácome Cortés

Corrección y estilo
Ariadna Janet Ochoa Iserte

Diseño editorial
Greisy del Carmen Ramos de la Cruz

Formación
José María Palmeros de la Rosa
Cristina Odette García Eguía
Jorge Jesús Gómez Mariaca

Fotografía de la portada
Adobe Firefly

Selección de imágenes
Alain Ávila Zayas
Cointo García Guevara
Jorge Alberto Contreras Cid

Cálculo Diferencial

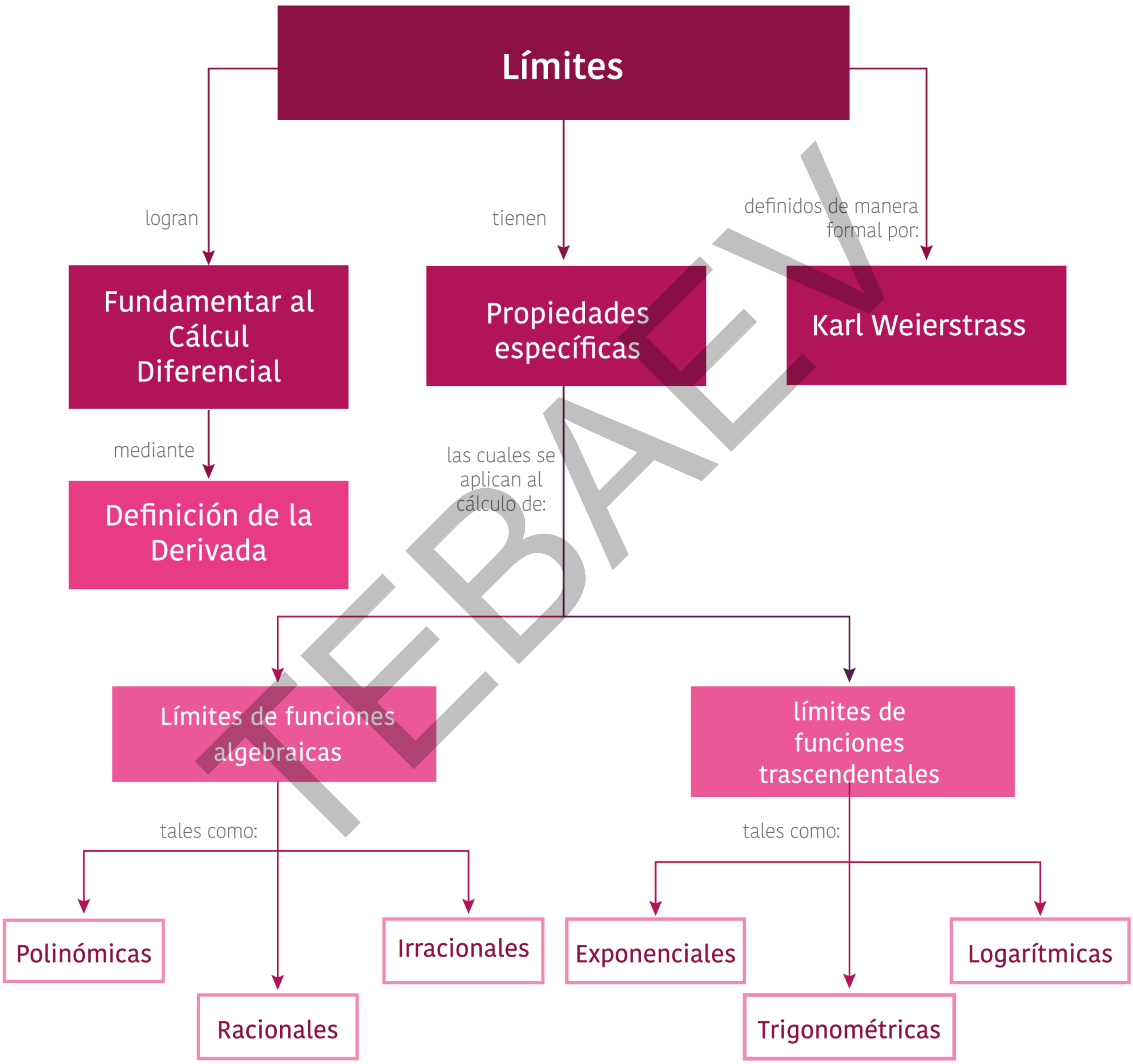
Primera edición: 2025
ISBN 978-607-725-547-5

Km 4.5 Carretera federal Xalapa-Veracruz
Col. SAHOP, C.P. 91090, Xalapa, Veracruz
Telebachillerato de Veracruz

Impreso en México

Módulo 1

Límites


Límites
logran
tienen
definidos de manera formal por:
Fundamentar al Cálcul Diferencial
Propiedades específicas
Karl Weierstrass
mediante
Definición de la Derivada
las cuales se aplican al cálculo de:
Límites de funciones algebraicas
límites de funciones trascendentales
tales como:
tales como:
Polinómicas
Racionales
Irracionales
Exponenciales
Trigonométricas
Logarítmicas

Introducción

El presente módulo inicia con una reseña sobre los principales personajes y sus aportaciones en el desarrollo del cálculo; así como el auge que le han dado a las matemáticas, explicando ciertos fenómenos de la naturaleza. Luego se analizará el concepto de límite, la interpretación analítica y gráfica de distintos casos de límites de funciones, así también las propiedades que estos poseen. Finalmente se pretende que el estudiante sea capaz de analizar y calcular el límite de funciones algebraicas y trascendentes, apoyándose en sus propiedades y otros recursos algebraicos ya aprendidos previamente.

Es importante mencionar que durante el desarrollo del módulo se citan una serie de actividades para el estudiante, cuyo objetivo principal es contribuir al logro de los aprendizajes esperados; además de estar diseñadas para que el alumno reconozca sus actitudes, así como la disposición al trabajo organizado, promueva el dialogo, experimente un pensamiento crítico y reflexivo y reconozca sus fortalezas.

Exploro mis saberes

Contesta, en tu cuaderno de apuntes, las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es una función y cuáles son las formas de representarla?

2. ¿Cuáles son las funciones algebraicas? (Menciona ejemplos)

3. ¿Cuáles son las funciones trascendentes? (Menciona ejemplos)

4. ¿Cómo se determina el dominio de una función racional?

5. ¿Para qué valores de $"x"$ *la función* $f(x)=\dfrac{3}{x-5}$ *está definida*

6. ¿Qué es una asíntota vertical, horizontal y oblicua para una función racional?

7. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(5x+7)^2=$

b) $(7x-9)(7x+9)=$

c) $(2x-3)^3=$

d) $(3x+8)(5x-2)=$

e) $(x-3)(x^2-4x+7)=$

f) $(x+3)(x^2-3x+9)=$

8. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

a) $5xy+15x^2=$

b) $3xy+3xz-5y-5z=$

c) $x^3-6x+5x=$

d) $x^2+2x-15=$

e) $4x^2-81$

f) $x^3-27=$

9. Transformando la siguiente función cuadrática de su forma general a su forma estándar, halla su vértice, sus raíces y realiza un bosquejo de la función:

$$f(x) = x^2+x-2$$

10. Usando identidades trigonométricas, simplifica la siguiente función:

$$f(\theta)=\frac{\cos\theta}{\cot\theta}=$$

Trabaja en tu producto esperado

I. Realiza, de manera individual, un ensayo donde reflexiones acerca de los siguientes puntos a partir de los antecedentes del cálculo:

1. ¿Consideras que es importante el conocimiento de estos antecedentes para comprender mejor los contenidos de esta asignatura?

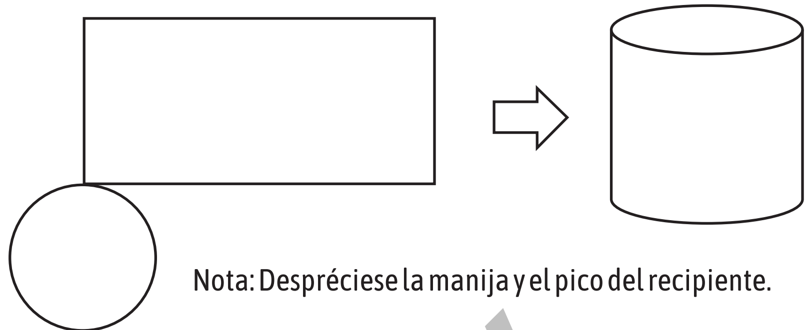
2. Analiza las condiciones que tuvieron los autores del cálculo para entender y desarrollar las matemáticas y contesta por qué a los jóvenes, en la actualidad, se les dificulta entender e ta asignatura.

3. Si te das cuenta, han pasado más de dos siglos de estos descubrimientos, ¿crees que se sigan aplicando hoy en día?, ¿cómo y en qué?

II. Analiza de manera individual, el siguiente problema de aplicación; al finalizar tu análisis, comenta en plenaria tus observaciones acerca de los conocimientos previos que puedes emplear para poder abordarlo y de los saberes que te harán falta para poderlo solucionar completamente. Recuerda que dichos conocimientos te harán falta para resolver esta situación y que los irás obteniendo en el transcurso de este bloque, para que al finalizarlo puedas dar solución por completo al problema; demostrando así, que has asimilado los aprendizajes esperados para esta unidad.

Se desea construir un recipiente cilíndrico de aluminio con capacidad de 2 litros, para una persona vendedora de leche de vaca en la ciudad de Altotonga, Veracruz; pero debido al alto costo de este material, este vendedor le sugiere al fabricante que lo construya con la menor cantidad de aluminio posible.

Observa que para construir este vaso despachador de leche es necesario tener un rectángulo (paredes del recipiente) y un círculo (base del recipiente) como lo muestra siguiente figura



Nota: Despréciese la manija y el pico del recipiente.

De este modo, el rectángulo es el área lateral del cilindro que tiene como ancho su altura, la cual denotemos con "h", y como largo la longitud de la circunferencia, $2\pi r$, denotando con "r" el radio del círculo. Con base en esta información, realiza las siguientes indicaciones:

1. Construye un modelo algebraico para obtener el área total que se necesitará de aluminio para la construcción del recipiente.

2. Utilizando la fórmula del volumen para un cilindro $V = \pi r^2 h$ y sabiendo que el volumen del recipiente debe ser de 2 litros, despeja la altura h.

3. Utiliza el valor de h obtenido anteriormente y con ello, expresa el modelo algebraico obtenido en el inciso a) en términos únicamente del radio. Así, la función del área total del recipiente quedará expresada en términos de r. Muy bien, hasta este momento ya tienes el área total en función de r únicamente. Esta función te quedará expresada de la siguiente manera: $A(r) = \pi r^2 + \frac{4}{r}$. Ahora contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿A qué tipo de función llegaste? (polinómica, logarítmica, trigonométrica, exponencial, etcétera)

   b) ¿Cuál es el límite de la función $A(r) = \pi r^2 + \frac{4}{r}$ cuando el valor de r se acerca a cero por la derecha?

   c) ¿Cuál es el límite de la función $A(r) = \pi r^2 + \frac{4}{r}$ cuando el valor de r se acerca a cero por la izquierda?

   d) ¿Existe algún límite para la función $A(r) = \pi r^2 + \frac{4}{r}$ cuando a r se le dan valores muy cercanos a cero?

   e) ¿Qué propiedad de los límites se aplicaría a la función $A(r) = \pi r^2 + \frac{4}{r}$ para hallar el límite de esta?

   f) Por cierto, ¿para qué valor de r, el fabricante del recipiente se gastaría la menor cantidad de material?

Ante el grupo, comenten las respuestas dadas a las preguntas, y a partir del análisis del problema discutan con qué conocimientos previos cuentan y cuáles les hacen falta para poder resolver la situación.

Antecedentes y aplicaciones del cálculo

Sabías que...
"... Arquímedes de Siracusa se olvidaba de comer y descuidaba su persona, hasta tal punto que, cuando en ocasiones era obligado por la fuerza a bañarse y perfumarse, solía trazar figuras geométricas en las cenizas del fuego y diagramas en los ungüentos de su cuerpo, y estaba embargado por una total preocupación y, en un muy cierto sentido, por una posesión divina de amor y deleite por la ciencia." (Plutarco)

Método exhaustivo.
Procedimiento geométrico de aproximación a un resultado, con el cual el grado de precisión aumenta en la medida en que se avanza el cálculo.

Figura 1.1 Arquímedes, el mayor genio matemático de la antigüedad.

El cálculo es una herramienta matemática de gran trascendencia, en cuanto a aplicaciones se refiere y nace de la necesidad de resolver cierto tipo de problemas. De hecho, aunque sus principales iniciadores son: Isaac Newton y Gottfried Leibniz, en el siglo XVII, los griegos ya fundamentaban algunos trabajos de índole geométrico, por ejemplo, la determinación del volumen de un cono a partir de la aproximación de un conjunto de cilindros de distintos radios, hecha por **Demócrito de Abderas (460 a 370 a. C.)** o la determinación del área de un círculo, hallada por el científico y matemático **Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C)**. Este último, considerado uno de los científicos más importantes de la Antigüedad clásica, aplicó el método exhaustivo para calcular el área bajo el arco de una parábola con la sumatoria de una serie infinita, definió la espiral que lleva su nombre, estableció fórmulas para los volúmenes de las superficies de revolución y un maravilloso sistema para expresar números de varias cifras.

Estos hechos son algunos de los que muestran cómo el cálculo ya tenía presencia en civilizaciones antiguas, tales como en el mundo griego; pero no fue hasta los comienzos de la edad moderna en que el cálculo toma su mayor auge, retomando y analizando de una manera más formal los problemas que al hombre siempre habían aquejado y que aún estaban sin resolver de una manera rigurosa. Los problemas que más tenían pendientes a los científicos de esa época se resumían en cuatro enunciados, los cuales eran:

1. Calcular la tangente a una curva de una forma general.
2. El problema de los máximos y mínimos de una curva.
3. El cálculo del área encerrada bajo una curva y el volumen de un sólido.
4. Dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante.

A continuación, te presentamos un poco de historia acerca de los personajes que dieron paso al cálculo, a partir del siglo XVI en adelante:

Galileo Galilei (1564 – 1642)
Fue un astrónomo, matemático y físico italiano. Calculó el espacio recorrido por un objeto en base a la aceleración con la formula $d=\frac{at^2}{2}$, verdadera integración del concepto diferencial. La belleza de esta fórmula es que demuestra que la distancia viajada por un objeto (d) solo depende del tiempo (t) y de una aceleración que es igual para todos los cuerpos (a). Nota que el peso no aparece en ninguna parte de la ecuación. Con esto Galileo Galilei introducía el concepto de función cuadrática, expresando que, en cualquier situación, podemos observar diversos aspectos medibles o magnitudes (temperatura, tiempo, longitud, masa, etcétera); algunas se mantienen constantes, pero otras tienen valores variables.

Johannes Kepler (1571-1630)
Astrónomo y matemático alemán. No hizo aportación específica al cálculo; pero fue capaz de establecer unas leyes que determinaban el movimiento de los planetas alrededor del sol, bajo el sistema heliocéntrico establecido por Nicolás Copérnico en aquellos tiempos, manipulando, en estas leyes, el concepto de área bajo una curva.

Heliocéntrico.
Modelo astronómico según el cual la tierra y los planetas se mueven alrededor del sol relativamente estacionario y que está en el centro del universo.

Rene Descartes (1596-1650)
Fue un filósofo y matemático francés, nacido en la Haye, Touraine (Francia). En el área de las Matemáticas, la contribución más notable que hizo Descartes fue el intento de unificar la antigua geometría con el álgebra, es decir, fue el primer matemático que intentó clasificar las curvas conforme al tipo de ecuaciones que las producen; y junto con su paisano Pierre Fermat, inventó lo que hoy en día conocemos como la Geometría Analítica, que es donde se sientan las bases para el desarrollo del cálculo.

Pierre Fermat (1601-1665)
Fermat nació en Beaumont-de-Lomagne, Francia, el 17 de agosto de 1601 y se sabe muy poco de sus primeros años de vida. Discutió con Descartes sobre cuestiones científicas como la refracción de la luz y **el método de los máximos y mínimos**.

A Fermat también se le atribuye haber establecido los principios fundamentales de la Geometría Analítica. Sin embargo, es más conocido por sus aportaciones a la teoría de números en especial por el conocido como último teorema de Fermat, que preocupó a los matemáticos durante aproximadamente 350 años, hasta que fue demostrado en 1995 por Andrew Wiles ayudado por Richard Taylor.

Sabías que...
A Fermat le gustaba escribir anotaciones sobre problemas y sus soluciones en los márgenes de los libros y fue así como en su ejemplar texto griego de La Aritmética de Diofanto se encontró lo siguiente: "Es imposible encontrar la forma de convertir un cubo en la suma de dos cubos, una potencia cuarta en la suma de dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia más alta que el cuadrado, en la suma de dos potencias de la misma clase. He descubierto para el hecho una demostración excelente, pero este margen es demasiado pequeño para que quepa en él".

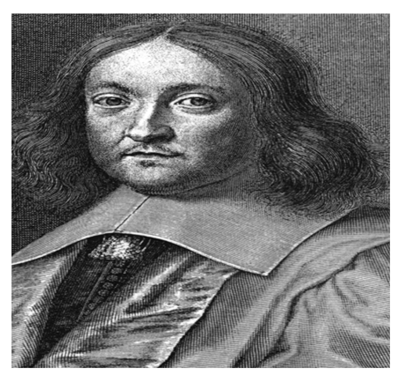


Figura 1.2 Pierre de Fermat.

Blaise Pascal (1623-1662)
Fue un matemático, físico, filósofo y teólogo francés. En las matemáticas, creó el triángulo de Pascal, arreglo triangular de los coeficientes binomiales en un triángulo.

Blaise Pascal inventó la calculadora mecánica en 1642. La pascalina fue la primera calculadora mecánica que funcionaba a base de ruedas y engranajes. El primer nombre que le dio a su invención fue "máquina de aritmética"; luego la llamó "rueda pascalina", y finalmente "pascalina".

Además, abordó la definición y el cálculo de la derivada e integral definida; y fue el iniciador de la teoría de juegos.


Figura 1.3 La calculadora mecánica de Pascal (La "Pascalina").

Isaac Barrow (1630-1677)
Isaac Barrow nació en Londres en 1630. Barrow es conocido por sus aportaciones al cálculo diferencial y a la óptica, especialmente por el **Teorema fundamental del cálculo**. Este teorema demuestra que la derivación y la integración son operaciones inversas. El Segundo teorema fundamental del cálculo, es una consecuencia directa del teorema mencionado anteriormente, y es también conocido como la Regla de Barrow en honor a él. La Regla de

Sabías que...

Cuando Isaac Newton fue puesto en cuarentena en debido a la peste bubónica, el aprovecho el tiempo para inventar el cálculo, desarrollar su teoría sobre la óptica, formular las leyes del movimiento y la gravedad.

En la historia del cálculo se encuentra la controversia de quién fue el inventor del cálculo, si Newton o Leibniz, algunos le dan la primicia a Newton y otros a Leibniz, pero se generaliza que Newton tuvo primero las ideas y que Leibniz las descubrió igualmente algunos años más tarde.
En conclusión, se sabe que tanto Newton como Leibniz trabajaron en forma casi simultánea, pero con enfoques diferentes. Los trabajos de Newton están motivados por sus propias investigaciones físicas (de allí que tratara a las variables como "cantidades que fluyen") mientras que Leibniz conserva un carácter más geométrico y, diferenciándose de su colega, trata a la derivada como un cociente incremental, y no como una velocidad.

Barrow permite el cálculo de integrales definidas a partir de alguna de sus primitivas. La aplicación más conocida es el cálculo del área delimitada por la gráfica de una (o varias) funciones.

Isaac Newton (1642-1727)
Fue un físico, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. Los principales descubrimientos matemáticos de Newton en el campo del cálculo infinitesimal datan de los llamados Anni Mirabiles 1665 y 1666. La Universidad de Cambridge, en la que Newton se había graduado como bachelor of arts (bachiller universitario en letras) en 1664, estuvo cerrada por la peste esos dos años. Newton pasó ese tiempo en su casa de Woolsthorpe y, como él mismo reconoció cincuenta años después, ése fue el período más creativo de su vida. A principios de 1665 descubre el teorema del binomio y el cálculo con las series infinitas. A finales de ese mismo año, el método de fluxiones, es decir, el cálculo de derivadas. En 1666 el método inverso de fluxiones y la relación entre cuadraturas y fluxiones. En esos dos años también inició las teorías de los colores y de la gravitación universal.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)
Fue un filósofo, lógico, matemático y político alemán. Inventó el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton. Su descubrimiento fue posterior al de Newton, aunque Leibnitz fue el primero en publicar el invento. En 1673, luego de estudiar los tratados de Pascal, Leibnitz se convence que los problemas inversos de tangentes y los de cuadraturas eran equivalentes. Alejándose de estos problemas, a partir de sumas y diferencias de sucesiones comienza a desarrollar toda una teoría de sumas y diferencias infinitesimales que acabarían en la gestación de su cálculo.

Leonhard Paul Euler (1707-1783)
Matemático suizo, cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras. Aunque obstaculizado por una pérdida parcial de visión antes de cumplir 30 años y por una ceguera casi total al final de su vida, Euler produjo numerosas obras matemáticas importantes, así como reseñas matemáticas y científicas. Entre sus obras se encuentran Instituciones del cálculo diferencial (1755), Instituciones del cálculo integral (1768-1770) e Introducción al álgebra (1770).

A Euler se le conoce por su tratamiento analítico de las matemáticas y su discusión de conceptos del cálculo infinitesimal, pero también por su labor en acústica, mecánica, astronomía y óptica.

Augustin Louis Cauchy (1798-1857)
Agustín Louis Cauchy matemático francés, fue pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas. Con

Cauchy se precisan los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)
Nació en Ostenfelde, Westfalia (actualmente Alemania) y murió en Berlín (Alemania). Citado como el "padre del análisis moderno", Weierstrass dio las definiciones actuales del concepto de continuidad, límite y derivada de una función de una manera más rigurosa, que siguen vigentes hoy en día. Esto le permitió demostrar un conjunto de teoremas que estaban entonces sin demostrar como el teorema del valor medio, el teorema de Bolzano-Weierstrass, y el Teorema de Heine- Borel.

Bernhard Riemann (1826-1866)
Bernhard Riemann matemático alemán, fue hijo de un ministro protestante. Recibió la educación elemental de su padre y mostró talento para la aritmética a temprana edad. En 1862, un año después de su matrimonio, sufrió un ataque de pleuritis y durante el resto de su vida fue un hombre agobiado por esta enfermedad para morir de tuberculosis a los 39 años de edad.

Los ricos y amplios conceptos de Riemann del espacio y de la geometría tuvieron profundos efectos en el desarrollo de la teoría física moderna y brindaron los conocimientos y métodos usados cincuenta años más tarde como apoyo concreto para la teoría general de la relatividad desarrollada por Einstein.

Además, clarificó la noción de Integral, definiendo lo que ahora llamamos Integral de Riemann. Él fue quien permitió calcular las integrales a partir de la definición como un límite de sumas. Su muerte prematura determinó una gran pérdida para el mundo matemático porque su trabajo fue brillante y de importancia capital.

¡A trabajar en tu producto esperado!

Es momento de realizar la actividad 1 de tu producto esperado. ¡A trabajar!.

Aplico lo aprendido

I. Elabora una línea del tiempo sobre los matemáticos más relevantes que hicieron aportaciones al desarrollo del cálculo; y una vez terminada exponla a tus compañeros de grupo, bajo la coordinación de tu profesor.

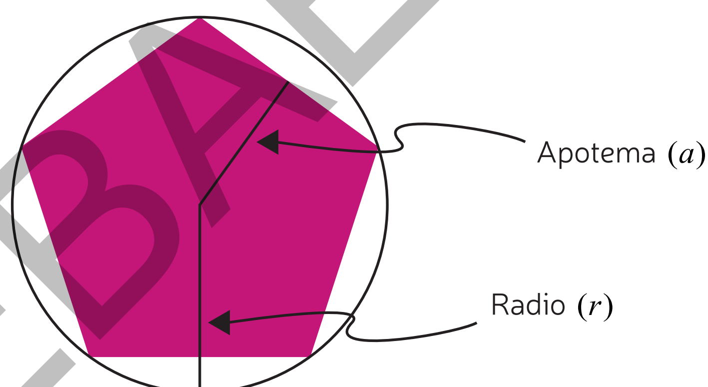
Límites

En este apartado nos toca analizar el concepto de límite, para ello piensa en las siguientes tres situaciones: inflar un globo, estirar una liga con tus manos o caminar en dirección al borde de un barranco. Ahora pregúntate, ¿puedes inflar indefinidamente el globo?, ¿podrás estirar la liga hasta una longitud demasiado grande?, ¿por qué ya no podrías seguir caminado después del borde del barranco?

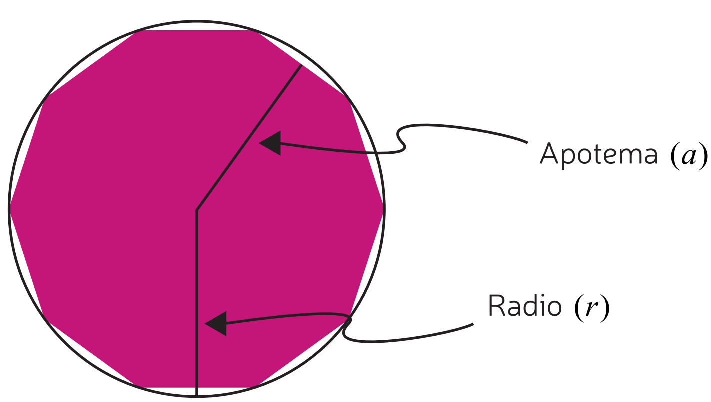
Si te das cuenta, todas estas situaciones nos implican un límite, esto es, una frontera, un lindero, un fin, un acabamiento de algo, a donde se llega y no se puede avanzar más, pues existe un límite.

Concepto e interpretación de límites

Para comprender mejor el concepto de límite, analicemos lo siguiente: se cree en la actualidad que los antiguos griegos calcularon el área de un círculo mediante las aproximaciones de polígonos regulares inscritos en él. Dibujemos un círculo, e inscribamos un pentágono regular en él, como lo muestra la siguiente figura:



Si comparamos el área sombreada del pentágono con el área del círculo que lo circunscribe, observamos que el área del pentágono se aproxima al área del círculo y que la longitud de la apotema es menor que la longitud del radio del círculo. ¿Qué pasará si en ese mismo círculo inscribimos ahora un polígono regular con más lados?, digamos un decágono:



Si nuevamente comparamos el área sombreada del decágono con el área del círculo, observamos que el área del polígono ya está muy cerca de cubrir el área del círculo y que la longitud de la apotema del polígono está más cerca de ser igual a la longitud del radio del círculo. ¿Qué pasaría si continuamos con este proceso, es decir, si ahora inscribimos en nuestro círculo un polígono regular con más lados? Pues nuestra respuesta ahora es inductiva, el área del polígono inscrito en nuestro círculo estará más próxima todavía al área de éste y también la longitud de la apotema del polígono casi es la longitud del radio. Si este proceso lo llevamos infinitamente, es decir, si nos aproximamos más al área del círculo, inscribiendo polígonos regulares cada vez más grandes entonces podríamos calcular el área del círculo. Por otro lado, debes darte cuenta, que entre más acerquemos la apotema del polígono regular al radio del círculo, entonces el área del polígono estará más cerca del área del círculo.

Con lo anterior, podríamos afirmar que para un polígono con n lados, si hacemos crecer n lo suficientemente grande, no distinguiremos entre la parte sombreada y la no sombreada, que corresponden al área del polígono y del círculo respectivamente. Y al mismo tiempo, la diferencia entre la apotema a del polígono y el radio r del círculo sería casi nula. De tal manera que al repetir este proceso infinitas veces, el perímetro del polígono $(P = nl)$ es prácticamente igual al perímetro de la circunferencia $(2\pi r)$, y la apotema (a) tomaría el valor del radio (r) del círculo, esto es en simbología de aproximación, $nl \approx 2\pi r$ (que se interpreta como: "el perímetro del polígono es aproximadamente igual al perímetro del círculo) siempre que $a \approx r$ (que se interpreta como: "la apotema es aproximadamente igual al radio del círculo).

Así, si tomamos la fórmula para calcular el área de un polígono y sustituimos ahí el perímetro por el valor $2\pi r$ y la apotema por el valor de r, se obtiene la fórmula para calcular el área del círculo.

$$A = \frac{Pa}{2} = \frac{(2\pi r)r}{2} = \pi r^2$$

Con este hecho, nota que la determinación del área de una circunferencia pudo hacerse considerándola como un caso extremo de un polígono.

En el cálculo diferencial también se trabaja con casos extremos específicamente aplicados a funciones, lo que da paso a definir el **concepto de límite**:

Definición

Sea f una función definida en cada número de algún conjunto D que contiene al número c, excepto posiblemente en el número c mismo. Diremos que L será el límite de f cuando x tiende[1] a c, si para cualquier argumento x muy cercano a c (tan cercano como se desee),

Ten en cuenta que...

La fórmula para calcular el área de un polígono regular es: $A = \dfrac{Pa}{2}$ donde, A es el área del polígono; P, su perímetro y a, su apotema. Su perímetro se obtiene con la fórmula $P = nl$, donde n es el número de lados del polígono y l la longitud de uno de sus lados. En cuanto a la circunferencia, se utilizan las fórmulas $P = 2\pi r$ y $A = \pi r^2$ para calcular su perímetro y su área respectivamente. Finalmente, para indicar que una cantidad se encuentra muy próxima a otra se pone el símbolo $\approx$ entre ellas, que se interpreta como "aproximadamente igual a".

hallamos que su imagen $f(x)$ también está muy cercana de L. Lo que escribiremos de manera simbólica como:

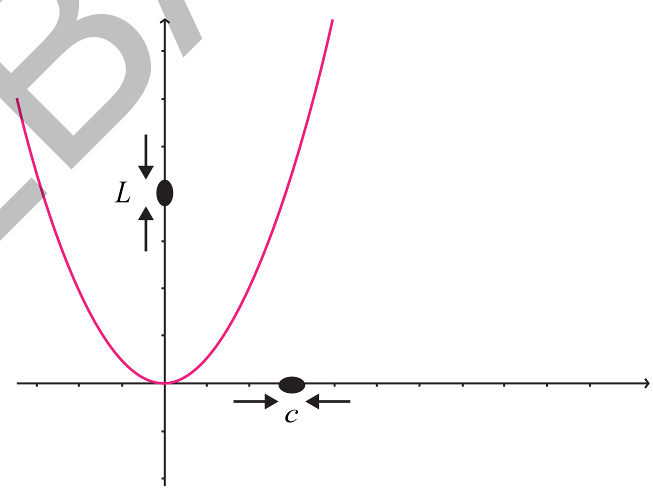
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Léase: "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a c, es L".

O también se puede escribir $f(x) \to L$ si $x \to c$, lo cual se lee: "$f(x)$ tiende a L si x tiende a c".

En otras palabras, esta definición un tanto informal, nos dice que los valores de una función $f(x)$ se aproximan al límite L conforme x lo hace al número c. O dicho de otra manera, el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se quiera tomando x lo suficientemente cerca de c, pero nunca igual a c.

Es pertinente decir que en la definición no necesariamente se requiere que la función f esté definida en el número c, para que el límite L exista. Más aún, si f está definida en el número c, el límite de f puede existir sin que tenga que ser igual a $f(c)$. Gráficamente la idea de límite es como la que se ve en la figura:



Lo dicho anteriormente lo podemos resumir de manera simbólica, en tres incisos:

a) $\lim_{x \to c} f(x) = L$, $f(c)$ está definida pero $L \neq f(c)$.

b) $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $f(c)$ no está definida.

c) $\lim_{x \to c} f(x) = L$, $f(c)$ está definida y $L = f(c)$.

[1] Tiende: significa que se aproxima cada vez más cerca de, y se indica con una flecha pequeña.

Ejemplo:

Supongamos que queremos hallar $\lim\limits_{x\to 3}(x+1)=?$

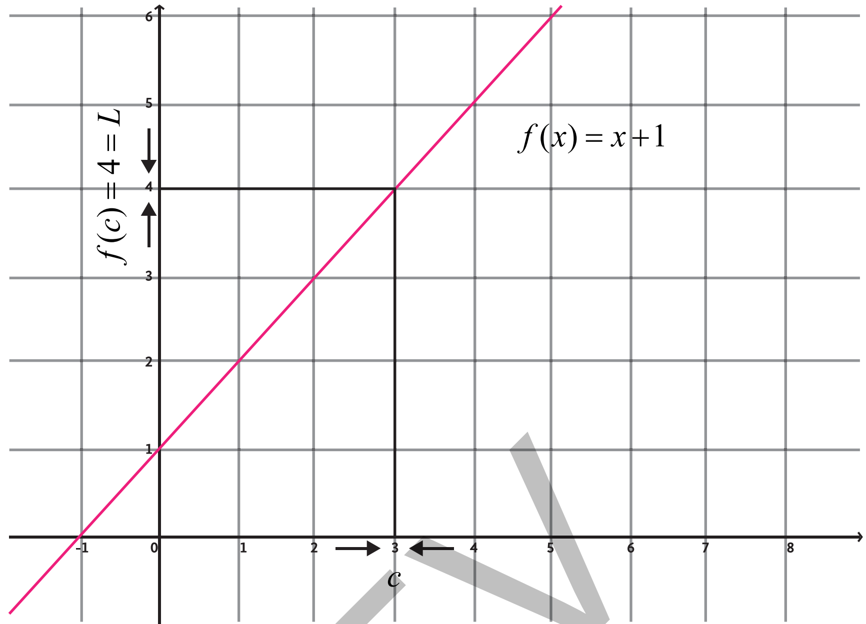
Empecemos por calcular las imágenes de valores muy próximos al número 3 tomados a su izquierda, pero sin que sean igual a él. Es decir,

Valores muy proximos a 3 por la izquierda	2	2.5	2.9	2.99	2.999	2.9999
Imágenes bajo la función $f(x)=x+1$	3	3.5	3.9	3.99	3.999	3.9999

Hagamos lo mismo, pero ahora tomando valores muy próximos a 3 por la derecha:

Valores muy proximos a 3 por la derecha	4	3.5	3.1	3.01	3.001	3.0001
Imágenes bajo la función $f(x)=x+1$	5	4.5	4.1	4.01	4.001	4.0001

Notemos que si nos acercamos a 3 por la izquierda, las imágenes bajo la función $f(x)=x+1$ se aproximan a 4; mientras que si nos aproximamos a 3 por la derecha, las imágenes bajo la función $f(x)=x+1$ se acercan a 4 también. Entonces de lo anterior concluimos que: $\lim\limits_{x\to 3}(x+1)=4$. La idea gráfica de nuestro límite se muestra en la siguiente figura:



Efectivamente, en nuestro ejemplo, $L=4$ y $f(x)=x+1$ está definida en 3, por lo tanto, $f(3)=3+1=4=L$, o sea que nos encontramos en el caso del inciso c) para límites, mencionado anteriormente.

Analicemos otro ejemplo donde suceda el mismo caso:

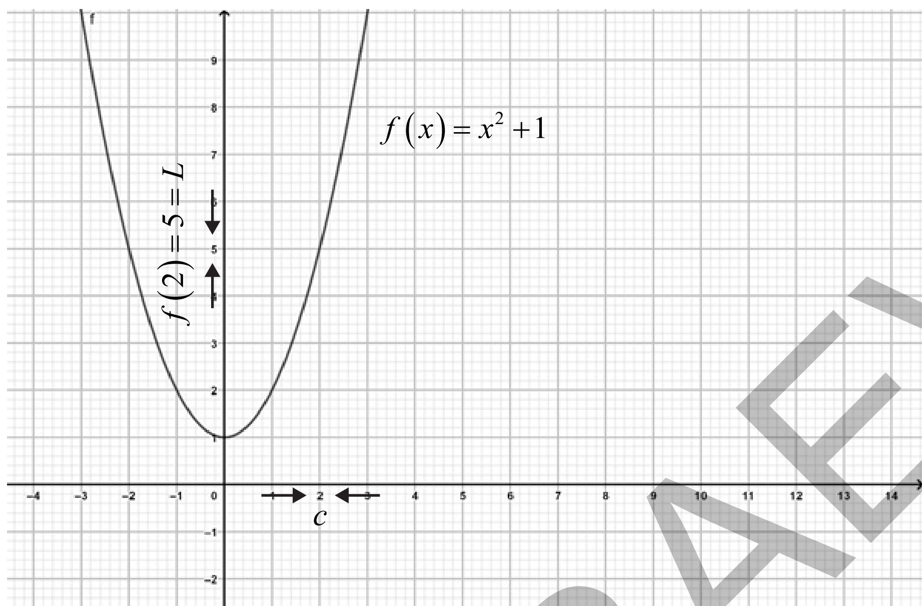
Ejemplo:

Calculemos $\lim_{x\to 2}(x^2+1)=L$. Hagamos el mismo proceso anterior; puesto que x va a tender a 2, daremos valores muy cercanos a este valor y observemos hacia donde se acercan las imágenes bajo la función $f(x)=x^2+1$.

Valores muy proximos a 2 por la izquierda	1	1.5	1.9	1.99	1.999	1.9999
Imágenes bajo la función $f(x)=x^2+1$	2	3.25	4.61	4.96	4.996	4.9996

Valores muy proximos a 2 por la derecha	3	2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001
Imágenes bajo la función $f(x)=x^2+1$	10	7.25	5.41	5.0401	5.004	5.0004

Efectivamente, observemos que al aproximarnos a 2 tanto por la derecha como por la izquierda, las imágenes bajo la función $f(x) = x^2 + 1$ se van aproximando a 5. Por lo tanto, $\lim_{x \to 2}\left(x^2 + 1\right) = 5$ y volvemos a caer en el caso del inciso c) mencionado párrafos atrás. La idea gráfica de nuestro límite se muestra en la siguiente figura:



El caso del inciso c) sucede propiamente para aquellas funciones cuyas gráficas se pueden dibujar de un solo trazo, es decir, aquellas que se trazan sin levantar el lápiz de la hoja de papel. Las funciones que tienen la característica antes mencionada se les conocen como **funciones continuas**, las cuales fueron definidas así en cursos anteriores.

De esta manera, podemos dar una definición de **función continua** apoyándonos en el concepto de límite:

Definición

Una función f será **continua** en el punto c perteneciente a su dominio si y solo si

1) f está definida en el número c.

2) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.

3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Convenientemente introducimos esta definición en este momento porque nos ahorrará el cálculo de los límites para funciones continuas en algún dominio D; ya que si la función es continua en algún dominio D (este dominio puede ser un intervalo o en todos los números reales), simplemente debemos aplicar la fórmula:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Obsérvese que, para conseguir el límite para el caso de una función continua, simplemente se evalúa el número c en la función $f(x)$.

Las funciones polinómicas son continuas en todos los números reales. Así, $f(x) = x+1$ y $f(x) = x^2+1$ son funciones polinómicas, por lo tanto son continuas y podemos aplicar la fórmula anterior para hallar sus límites:

$$\lim_{x \to 3} (x+1) = (3+1) = 4$$

$$\lim_{x \to 2} (x^2+1) = (2^2+1) = 5$$

Ten en cuenta que...
Una función polinómica se representa de la forma:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, $a_n \neq 0$ y n es entero positivo. Además, una función polinomial es continua en todos los números reales.

Para el primer límite nota que solo se evaluó el número 3 en $f(x) = x+1$ lo que nos da el límite buscado $L = 4$. En el segundo límite se aplica lo mismo, se evalúa el número 2 en la función $f(x) = x^2+1$, obteniendo $L = 5$.

Entonces si queremos calcular los límites para funciones polinómicas, solo bastará con aplicar la fórmula $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ sin la necesidad de hacer las tabulaciones que se hicieron en un principio para hallar el límite solicitado.

Ejemplo:

1) $\lim_{x \to 5} (x^2 - 2x - 3) = (5)^2 - 2(5) - 3 = 12$

2) $\lim_{x \to -2} (x^3 - x^2 + x + 5) = (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) + 5 = -9$

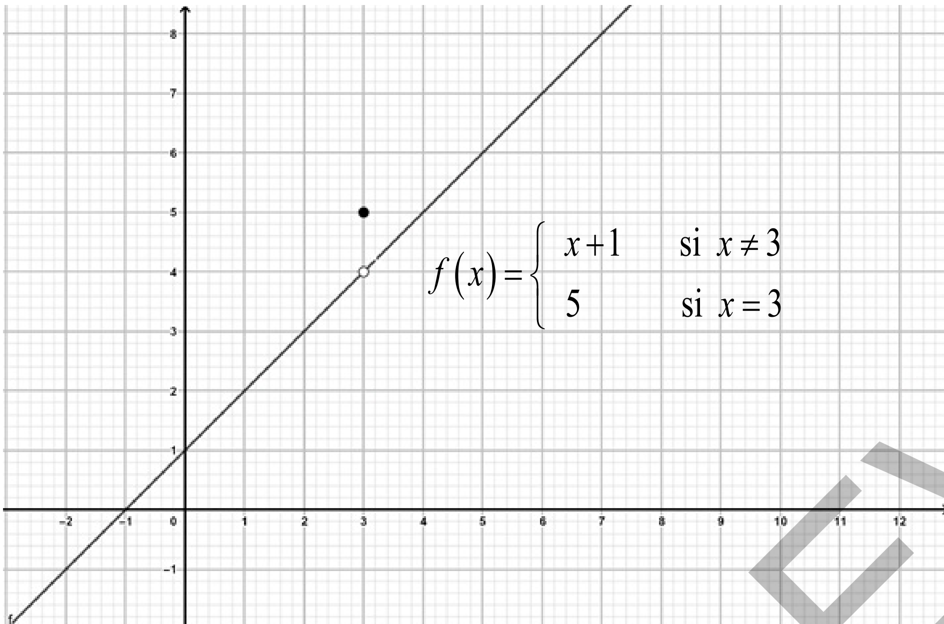
3) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (x-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

Ahora nos remitiremos a considerar un ejemplo donde el límite de la función exista, pero que no sea igual al valor de $f(c)$. Analicemos el caso del inciso **a)**, esto es, $\lim_{x \to c} f(x) = L$ existe, $f(c)$ está definida, pero $f(c) \neq L$.

Para ello, consideremos la función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

y calculemos $\lim_{x \to 3} f(x) = ?$ Gráficamente la función se ve así:



Observemos que esta función tiene un salto justo de 3 en este punto la función vale 5. Veamos qué pasa si nos acercamos al número 3 por la izquierda y derecha de este bajo la función dada.

Valores muy proximos a 3 por la izquierda	2	2.5	2.9	2.99	2.999	2.9999
Imágenes bajo la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$	3	3.5	3.9	3.99	3.999	3.9999

Valores muy proximos a 3 por la derecha	4	3.5	3.1	3.01	3.001	3.0001
Imágenes bajo la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$	5	4.5	4.1	4.01	4.001	4.0001

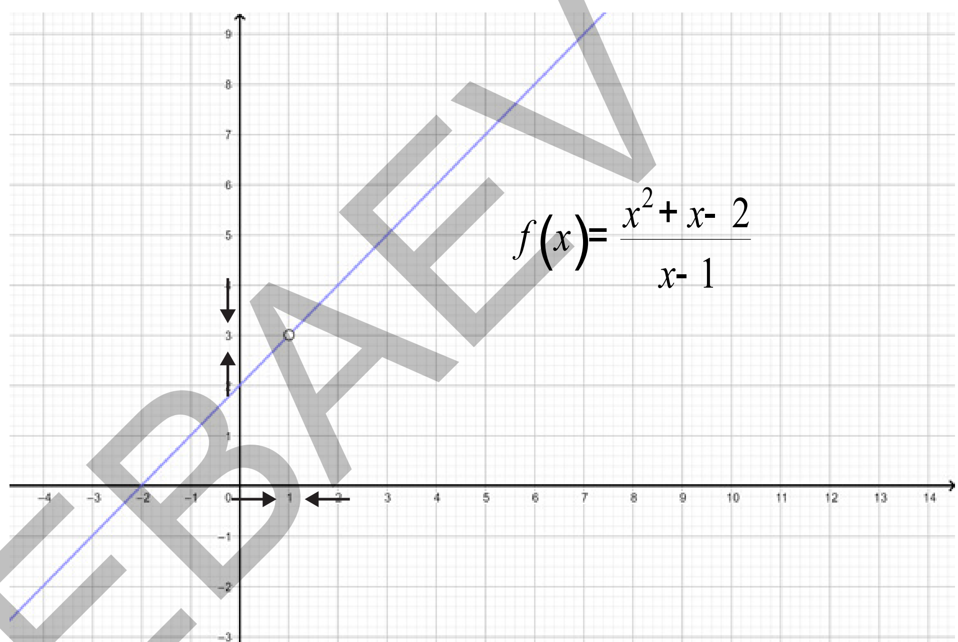
De nuestros valores obtenidos vemos que $f(x)$ tiende a 4 cuando x tiende 3, es decir, el límite de esta función existe y es 4 $\left(\lim_{x \to 3} f(x) = 4 \right)$ y por supuesto el límite en este caso no coincide con $f(3)$ ya que $f(3) = 5$.

Finalmente, te presentamos un ejemplo de límite donde se presentan las condiciones del caso del inciso **b)**, esto es: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ existe y que $f(c)$ no esté ni siquiera definida.

Ejemplo:

Consideremos el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

De inicio analicemos la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$:



En la gráfica de la función se observa un salto justo en la coordenada (1,3); pues la función no está definida para $x = 1$. Pero a pesar de esto, se nota, por inspección en la gráfica, que si nos acercamos a $x = 1$ tanto por la derecha como por la izquierda en el eje horizontal, entonces las imágenes de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ se acercarían a $y = 3$ en el eje vertical. Constatemos esto mediante una tabulación:

Valores muy proximos a 1 por la izquierda	0.5	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
Imágenes bajo la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$	2.5	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999

Valores muy proximos a 1 por la derecha	1.5	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
Imágenes bajo la función $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$	3.5	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001

Efectivamente, el límite de la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ cuando x tiende a 1, existe y es 3; aunque $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ no esté definida en $x=1$.

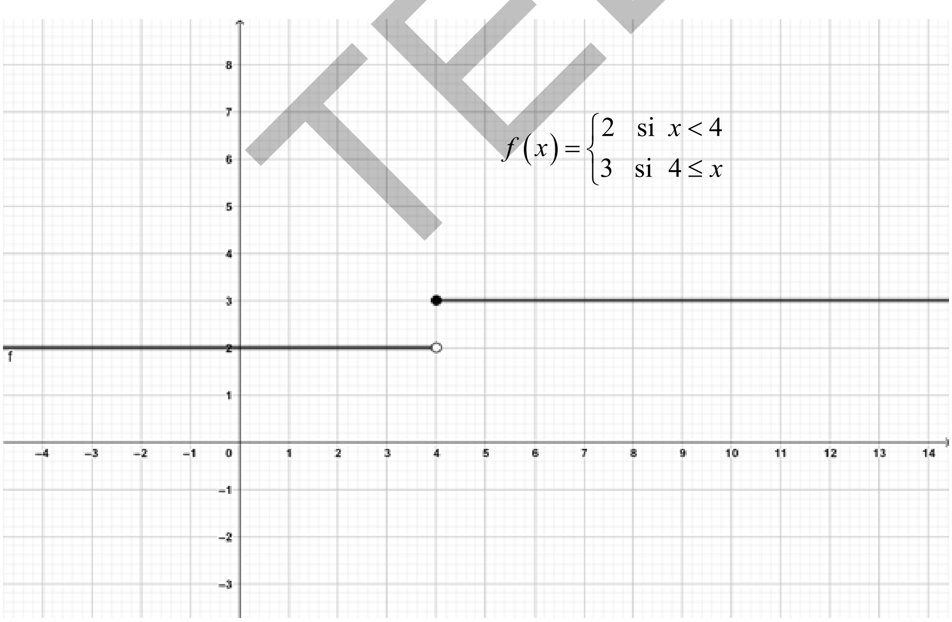
Hasta el momento, hemos estado hablando de casos donde el límite existe, pero también habrá casos donde el límite no exista; y para demostrar esto consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Supongamos que nos piden calcular:

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=?$ donde $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<4 \\ 3 & \text{si } 4\le x \end{cases}$ (función escalonada).

Gráficamente la función se traza como en la siguiente figura:



Para calcular este límite, recurramos nuevamente al proceso de tabulación que hemos venido trabajando. Ahora nos toca dar valores muy próximos a 4, tanto por su izquierda como por su derecha.

Valores muy proximos a 4 por la izquierda	3	3.5	3.9	3.99	3.999	3.9999
Imágenes bajo la función $f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<4\\ 3 & \text{si } 4\le x\end{cases}$	2	2	2	2	2	2

Valores muy proximos a 4 por la derecha	5	4.5	4.1	4.01	4.001	4.0001
Imágenes bajo la función $f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<4\\ 3 & \text{si } 4\le x\end{cases}$	3	3	3	3	3	3

Por lo tanto, $\lim_{x\to 4} f(x)$ no existe, puesto que cuando nos acercamos a 4 por la izquierda las imágenes de $f(x)$ siempre son iguales a 2; mientras que si nos acercamos por la derecha a 4 las imágenes bajo $f(x)$ siempre son iguales a 3. Es decir, no hay un solo valor para las imágenes, al cual converjan o se aproximen.

Aplica lo aprendido

I. En los siguientes ejercicios, aplica la definición de límite, para encontrar el límite de las siguientes funciones. Recuerda que el aplicar la definición de límite, implica dar valores muy cercanos alrededor de c, y examinar si las imágenes se aproximan a un número L, para lo cual tendrás que hacer una tabulación como la de los ejemplos anteriores. Una vez encontrado el límite, apóyate de la gráfica de la función para comprobar tu respuesta. Para graficar, puedes usar el software *GeoGebra*.

1. $\lim_{x\to 2} 7 =$
2. $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} (4x+3) =$
3. $\lim_{x\to -4} (7-2x) =$
4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} =$
5. $\lim_{x\to 4} (2x^2-4x+5) =$
6. $\lim_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x} =$

7. $\lim_{x \to -2}(x^3 - 1)$

8. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

Propiedades de los límites

Los límites cuentan con ciertas propiedades que estudiaremos a continuación, las cuales serán aprovechadas para hacer más fácil el cálculo de algunos límites de funciones. Cabe mencionar, que solo enlistaremos las propiedades de los límites sin dar una demostración de estas; puesto que para dar una demostración de ellas necesitaríamos una definición formal de límite y no la que se dio al principio de este bloque. Si bien nuestro propósito en este apartado es que aprendas a aplicarlas y hacerte el cálculo de límites más cómodo, mas no el que trates su demostración.

PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES DE LOS LÍMITES	
Propiedad	Ejemplo
a) Límite de una función constante. Si $f(x) = k$ es una función constante, entonces para cualquier número c $$\lim_{x \to c} k = k$$	$\lim_{x \to 3} 8 = 8$
b) Límite de la función identidad. Dada $f(x) = x$ la función identidad, y c cualquier número $$\lim_{x \to c} x = c$$	$\lim_{x \to 5} x = 5$
c) Límite de la función identidad elevada a una potencia. Si $f(x) = x^n$ es una potencia en x, c cualquier número y n entero positivo, $$\lim_{x \to c} (x^n) = c^n$$	$\lim_{x \to -1} x^5 = (-1)^5 = -1$
d) Límite de una función lineal Sea $f(x) = mx + b$ una funcional lineal, donde m y b son números cualesquiera, $$\lim_{x \to c} (mx + b) = m(c) + b$$	$\lim_{x \to -3} 5x - 3 = 5(-3) - 3 = -15 - 3 = -18$

e) Límite de un polinomio.

Sea $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, $a_n \neq 0$ y n es entero positivo. Entonces

$$\lim_{x\to c} P(x)=P(c)$$

$$\lim_{x\to 2} x^4-2x^3+5x^2-3x-1=$$
$$=(2)^4-2(2)^3+5(2)^2-3(2)-1$$
$$=13$$

Propiedades de límites aplicadas a operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones, para las cuales $\lim_{x\to c} f(x)=L_1$ y $\lim_{x\to c} g(x)=L_2$ existen. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

f) Límite de una función multiplicada por una constante.

$$\lim_{x\to c} [k\,f(x)]=k\left[\lim_{x\to c} f(x)\right]=k\,L_1$$

Se lee: "El límite de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por el límite de la función".

Comprobación:

Sea $f(x)=x^3$. Calcular $\lim_{x\to -5} 9f(x)=\lim_{x\to -5} 9x^3=?$

Comprobemos que dicha propiedad es válida. Por un lado, tenemos que:

$\lim_{x\to -5} 9x^3=9(-5)^3=-1125$ (de manera directa).

Si aplicamos la propiedad, observe que se obtiene el mismo resultado:

$9\left(\lim_{x\to -5} x^3\right)=9(-125)=-1125$ (sacando la constante).

g) Límite de la suma de dos funciones.

$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)$$
$$=L_1+L_2$$

Se lee: "El límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de cada una de las funciones".

Comprobación:

Sean $f(x)=x^2$ y $g(x)=x-5$. Calcular:

$\lim_{x\to 3}[f(x)+g(x)]=?$,

si sumamos las funciones y calculamos de manera directa:

$$\lim_{x\to 3}(x^2+x-5)=(3)^2+(3)-5=7$$

Aplicando la propiedad, es decir, calculando límites para cada una de las funciones y luego sumando, obtenemos el mismo resultado:

$$\lim_{x\to 3} f(x)+\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3} x^2+\lim_{x\to 3}(x-5)$$
$$=9+(-2)$$
$$=7$$

h) Límite de la diferencia de dos funciones. $\lim_{x\to c}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$ $=L_1-L_2$ Se lee: “El límite de una diferencia de funciones es la diferencia de los límites de las funciones”.	**Comprobación:** Sean $f(x)=x^3$ y $g(x)=x^2-1$ dos funciones. Calcular $\lim_{x\to 1}\left[f(x)-g(x)\right]=?$ Por un lado, si restamos las funciones y hacemos el cálculo directo: $\lim_{x\to 1}\left[x^3-x^2+1\right]=(1)^3-(1)^2+1=1$ Por otro lado, tomando la diferencia de los límites para cada función, obtenemos el mismo valor: $\lim_{x\to 1}x^3-\lim_{x\to 1}(x^2-1)=(1)^3-\left((1)^2-1\right)$ $=1-(1-1)$ $=1-0$ $=1$
i) Límite del producto de dos funciones. $\lim_{x\to c}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to c}f(x)\lim_{x\to c}g(x)$ $=L_1\cdot L_2$ Se lee: “El límite de un producto de funciones es igual al producto de los límites de las funciones”.	**Verifiquemos que se cumple.** Sean $f(x)=2x-3$ y $g(x)=x-6$, calcular: $\lim_{x\to 2}\left[f(x)g(x)\right]=?$ Multiplicando funciones y calculando el límite sobre la multiplicación de estas: $\lim_{x\to 2}\left[(2x-3)(x-6)\right]=\lim_{x\to 2}(2x^2-15x+18)$ $=2(2)^2-15(2)+18$ $=-4$ Por otro lado, obtenemos el mismo resultado, si calculamos los límites y luego los multiplicamos: $\lim_{x\to 2}(2x-3)\lim_{x\to 2}(x-6)=(1)(-4)=-4$
j) Límite del cociente de dos funciones. $\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$ $=\frac{L_1}{L_2}$ si $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$ y $g(x)\neq 0$ Se lee: “El límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los límites de las funciones”	**A través de un ejemplo comprobemos la propiedad.** Si $f(x)=3x-4$ y $g(x)=x+1$ Entonces calcular: $\lim_{x\to 5}\frac{3x-4}{x+1}$ Haciendo el cálculo de manera directa: $\lim_{x\to 5}\frac{3x-4}{x+1}=\frac{3(5)-4}{5+1}=\frac{11}{6}$ Ahora dividiendo los límites como lo dice la propiedad: $\frac{\lim_{x\to 5}(3x-4)}{\lim_{x\to 5}(x+1)}=\frac{(3(5)-4)}{(5+1)}=\frac{11}{6}$ Observa, se obtiene el mismo resultado.

k) Límite de la n-ésima potencia de una función.

$$\lim_{x \to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$$
$$= L^n$$

con n entero positivo

Se lee: "El límite de una potencia es igual a la potencia del límite".

Comprobemos igualmente con un ejemplo.

Sea $f(x) = -3x + 7$, calcular $\lim_{x \to 7}[-3x+7]^3$.

De manera directa, se calcula el límite:

$$\lim_{x \to 7}[-3x+7]^3 = [-3(7)+7]^3$$
$$= [-14]^3$$
$$= -2744$$

Utilizando la parte derecha de la propiedad:

$$\left[\lim_{x \to 7}(-3x+7)\right]^3 = [-3(7)+7]^3$$
$$= [-14]^3$$
$$= -2744$$

Por lo tanto, la propiedad se comprueba.

l) Límite de la raíz n-ésima de una función.

$$\lim_{x \to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$$, si

$$\left(\lim_{x \to c} f(x)\right) > 0 \text{ cuando } n \text{ par}$$

Se lee: "El límite de una raíz es igual a la raíz del límite".

Verifiquemos esta propiedad.

Sea $f(x) = 3x + 1$, calcular $\lim_{x \to 5}\sqrt{3x+1}$. Si lo calculamos directamente:

$$\lim_{x \to 5}\sqrt{3x+1} = \sqrt{3(5)+1} = \sqrt{16} = 4$$

Ahora si aplicamos la parte derecha de la propiedad, se verifica la igualdad:

$$\sqrt{\lim_{x \to 5}(3x+1)} = \sqrt{3(5)+1} = \sqrt{16} = 4$$

Además, obsérvese que el dominio de la función está en el intervalo $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$, por lo que la imagen de $f(5)$ está definida. Además en este caso $n = 2$.

Ten en cuenta que...

Las propiedades de límites g), h) e i) se pueden extender para número finito de n funciones. Es decir, el límite de la suma y de la diferencia de funciones es la suma o la diferencia de los límites de las funciones según sea el caso. Simbólicamente:

Si $\lim_{x \to c} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to c} f_2(x) = L_2$, ... , y $\lim_{x \to c} f_n(x) = L_n$

entonces $\lim_{x \to c}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$

Análogamente, el límite de un producto de n funciones es el producto de los límites de las funciones. Simbólicamente:

Si $\underset{x\to c}{lím} f_1(x) = L_1,\ \underset{x\to c}{lím} f_2(x) = L_2,\ \ldots,\ \text{y}\ \underset{x\to c}{lím} f_n(x) = L_n$

entonces $\lim\limits_{x\to c}\left[f_1(x)\times f_2(x)\times\ldots\times f_n(x)\right] = L_1\times L_2\times\ldots\times L_n$

A continuación, mostraremos unos ejemplos en donde aplicaremos algunas de las propiedades de los límites en la resolución de estos, y así observes su utilidad.

Ejemplo 1:

Calcular $\underset{x\to 5}{lím}\left(x^3-9x^2+2x-6\right)$, aplicando las propiedades de los límites.

$$\underset{x\to 5}{lím}\left(x^3-9x^2+2x-6\right) = \underset{x\to 5}{lím}\, x^3 - 9\,\underset{x\to 5}{lím}\, x^2 + 2\,\underset{x\to 5}{lím}\, x - \underset{x\to 5}{lím}\, 6$$

En este ejercicio se aplicaron básicamente las propiedades: el límite de una suma y diferencia de funciones. Es decir, el límite de una suma o diferencia de un número finito de funciones es la suma o diferencia de los límites de cada una de las funciones.

Ejemplo 2:

Calcular $\underset{x\to -3}{lím}\left(\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-4}\right)$ aplicando las propiedades de los límites:

$$\underset{x\to -3}{lím}\left(\frac{(x+2)(x-1)}{x-4}\right) = \frac{\underset{x\to -3}{lím}\left[(x+2)(x-1)\right]}{\underset{x\to -3}{lím}(x-4)} = \frac{\underset{x\to -3}{lím}(x+2)\,\underset{x\to -3}{lím}(x-1)}{\underset{x\to -3}{lím}(x-4)}$$

$$= \frac{(-1)(-4)}{-7}$$

$$= \frac{4}{-7}$$

$$= -\frac{4}{7}$$

En este ejercicio, de inicio aplicamos la propiedad del límite de un cociente de funciones. Luego en el numerador, aplicamos la propiedad del límite de un producto, para finalmente calcular los límites sobre las expresiones más simples y obtener el límite de la expresión inicial.

Ejemplo 3:

Determinar el siguiente límite, haciendo uso de la mayoría de las propiedades de límites: $\underset{x\to 2}{lím}\sqrt{\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}=\sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}=\sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3)+\lim\limits_{x\to 2}(2x)+\lim\limits_{x\to 2}(3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2)+\lim\limits_{x\to 2}(5)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^3+2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2+\lim\limits_{x\to 2}5}}$$

$$=\sqrt{\frac{2^3+(2)(2)+3}{2^2+5}}$$

$$=\sqrt{\frac{8+4+3}{9}}$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

En este último ejemplo, de inicio se aplica la propiedad del límite de la raíz n-ésima de una función. Luego, dentro del radical, se aplica la propiedad del límite de un cociente de funciones, para después aplicar, tanto en denominador como en numerador, las propiedades del límite de la suma y la diferencia de funciones, incluyendo en estos pasos, las propiedades del límite de una potencia de funciones, el límite de una constante y el límite de una función multiplicada por constante; para finalmente llegar a obtener el resultado definitivo aplicando propiedades de radicales.

Aplico lo aprendido

I. Calcula los siguientes límites de funciones aplicando las propiedades de los límites vistas anteriormente, indicando al final de cada eje cicio las propiedades que tuviste que aplicar para llegar a la solución.

1. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-2x^2+3x-4)$
2. $\lim\limits_{x\to -4}(5x+2)$
3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x-5}{5x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}$
5. $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[3]{\frac{5+2x}{5-1}}$
6. $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+8)$
7. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)$
8. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+1}{x^2-3x+4}$

Límites de funciones algebraicas

Ahora que conocemos las propiedades de los límites, fácilmente podremos calcular el límite de funciones algebraicas, tales como la función constante, identidad, lineal, cuadrática, cúbica, y cualquier función polinomial e incluso, aunque con algunas excepciones, las racionales e irracionales. Estas últimas funciones las puntualizaremos de una mejor manera, más adelante.

Límites de funciones polinomiales

Como ya lo habíamos afirmado anteriormente, para las funciones polinomiales es fácil encontrar su límite; ya que sólo basta con sustituir el valor al cual tiende la variable independiente x, en la función polinómica $f(x)$ y listo, la imagen de esta será el límite de la función polinomial. Esto se debe a que las funciones polinómicas son funciones continuas y están definidas en todos los números reales.

Así que para las siguientes funciones polinomiales solo sustituiremos el valor al cual tienda la variable x en la función polinomio para encontrar el límite. Veamos:

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x\to -7}(-9) = -9$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}(x) = \frac{1}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to -4}(-5x+11) = -5(-4)+11 = 20+11 = 31$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}(x^2-3x-5) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) - 5 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 5 = -\frac{29}{4}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(x^3-6x^2-x+11) = (0)^3 - 6(0)^2 - (0) + 11 = 11$

6. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(x^4-x^3-5x^2+8x-9) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{2}\right) - 9$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{5}{4} + \frac{8}{2} - 9$$

$$= -\frac{101}{16}$$

7. $\lim\limits_{x\to 100}(-14+x^2) = -50+(100)^2 = -50+10000 = 9950$

¡A trabajar en tu producto esperado!

Es momento de realizar los incisos a), b) c) y d) de tu producto esperado. A trabajar.

Aplico lo aprendido

I. Calcula el límite de las siguientes funciones polinomiales. Una vez calculado el límite, puedes apoyarte de la gráfica de la función para corroborar tu resultado.

1. $\lim\limits_{x \to 3} (3x+4)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} (2x-3)$
3. $\lim\limits_{x \to -1} (x^4+5x^3+12x^2-x+9)$
4. $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2-3x+1)$
5. $\lim\limits_{x \to 3} (-x^3+12x^2+45x-52)$
6. $\lim\limits_{x \to 5} (8x^2-2x+1)$
7. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{7}} (x^2-8x+1)$
8. $\lim\limits_{x \to 4} \left(7-\frac{x}{4}\right)$
9. $\lim\limits_{x \to 100} (x^3-6x^2+8x-9)$
10. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{5}} \left(5x^2-x-3\right)$
11. $\lim\limits_{x \to \pi} \left(x^3-\frac{1}{2}x^2-x-1\right)$

Límites de funciones racionales

Los límites de funciones racionales se pueden calcular al igual que las funciones polinomiales, sustituyendo el valor al que tiende la variable independiente en la función racional, **siempre y cuando el valor al que tienda la variable independiente no sea uno de los valores para los cuales el denominador de la función racional se anule.**

Como sabemos, por cursos anteriores, el dominio de una función racional queda bien definido cuando excluimos los valores para los cuales el denominador de estas funciones se anula. Así que, si tendiéramos la variable independiente hacia uno de estos valores y tratamos de encontrar el límite sustituyendo este valor en la función, entonces obtendríamos un valor indeterminado; puesto que estaríamos dividiendo algo entre cero y las divisiones entre cero no están definidas en matemáticas. Por lo que, para este caso, el límite no se podrá obtener por sustitución directa en la función racional; ante esta situación podemos pensar dos cosas: que el límite no existe, o que existe, pero habrá que buscar alguna forma alternativa para determinarlo. Dentro de los métodos que manejaremos para tratar de hallar el límite, está el método de factorización o bien aplicar el método de los límites laterales. Analicemos esto a través de algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

Calcula el límite: $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2-4}=$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{1+2}{(1)^2-4}=\frac{3}{1-4}=\frac{3}{-3}=-1$$

Nota que en este límite solo sustituimos el número 1 en la función racional y obtuvimos el límite sin ningún problema.

Ejemplo 2:

Halla el siguiente límite: $\displaystyle \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+9}=$

Solución:

Intentemos obtenerlo, sustituyendo el valor $x=-3$ en la función y observemos qué pasa:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+9}=\frac{-3+3}{(-3)^2+9}=\frac{0}{9+9}=\frac{0}{18}=0$$

Como el cero aparece en el numerador y no en el denominador en las últimas fracciones, entonces concluimos que el límite se puede obtener por sustitución y que este será cero.

Ejemplo 3:

Encuentra el siguiente límite: $\displaystyle \lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x^2-9}$

Solución:

Nuevamente tratemos de hallar el límite sustituyendo el valor $x=-3$ en la función racional:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{-3+3}{(-3)^2-9}=\frac{0}{9-9}=\frac{0}{0}$$

Puesto que, al tratar de obtener el límite por sustitución, se llega a una indeterminación, entonces trataremos de aplicar otros métodos para obtenerlo:

Método 1. Por límites laterales.

Tabulemos los valores de $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ cuando x toma los valores de $-4,\ -3.5,\ -3.1,\ -3.01,\ -3.001$ y cuando x es igual a $-2,\ -2.5,\ -2.9,\ -2.99,\ -2.999$ para verificar si $f(x)$ se aproxima a un valor, conforme x tiende a -3.

x	
-4	-0.1428
-3.5	-0.1538
-3.1	-0.1639
-3.01	-0.1663
-3.001	-0.1666

x	$f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$
-2	-0.2
-2.5	-0.1818
-2.9	-0.1694
-2.99	-0.1669
-2.999	-0.1666

Observa que al acercarnos al valor -3 tanto por la derecha como por la izquierda las imágenes bajo $f(x)$ se acercan a $-\frac{1}{6}$. Por lo tanto, afirmamos que $\displaystyle lím_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=-\frac{1}{6}$. Nota que este método se manejó al inicio del bloque cuando se dio la definición intuitiva de límite de una función.

Ten en cuenta que...

$-0.16666...=-0.1\overline{6}$ es equivalente a $-\frac{1}{6}$

Demostremos esto, hagamos $x=-0.1666\overline{6}$, luego

$100x=-16.66\overline{6}$ y $10x=-1.666\overline{6}$. Así,

$$90x=100x-10x=-16.66\overline{6}-\left(-1.66\overline{6}\right)=-16.66\overline{6}+1.66\overline{6}=-15$$

luego,

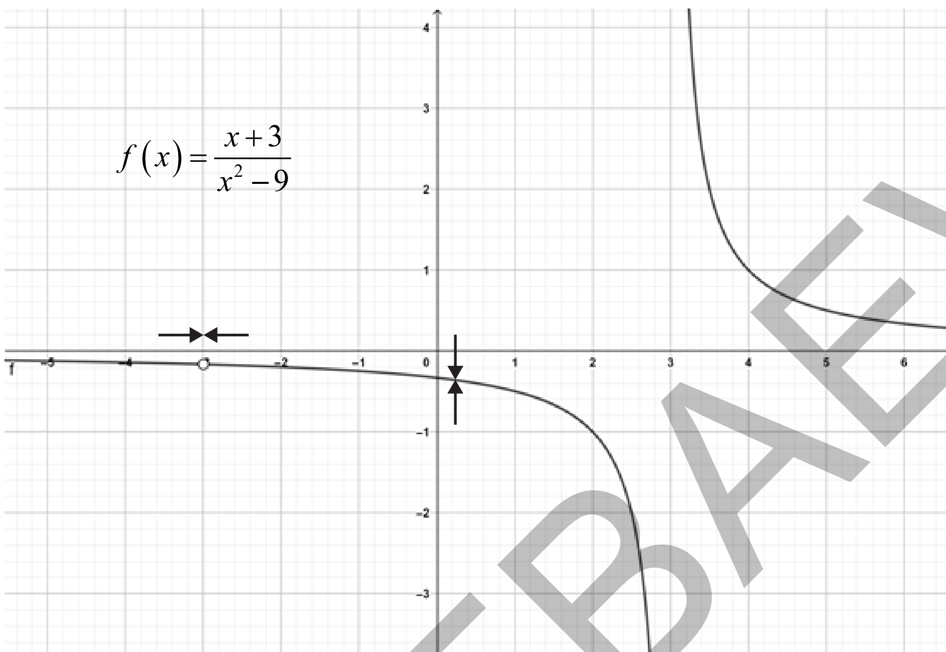
$$90x=-15$$
$$x=-\frac{15}{90}$$
$$x=-\frac{1}{6}$$

Método 2. Por factorización.

Si te das cuenta, en este caso, el denominador de la función racional es una diferencia de cuadrados la cual se puede factorizar a través de binomios conjugados, veamos si al factorizar podemos eliminar algunos factores y transformar la función racional a una función equivalente en la cual sea más fácil hallar el límite sustituyendo valores:

$$lím_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=lím_{x\to -3}\frac{\cancel{x+3}}{\cancel{(x+3)}(x-3)}=lím_{x\to -3}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{-3-3}=-\frac{1}{6}$$

Efectivamente, el proceso de factorización logró eliminar factores y calcular el límite sustituyendo sobre otra función equivalente. Si observamos la gráfica de $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$, logramos constatar que no está definida para $x=-3$ y que precisamente en ese número la gráfica tiene un salto, por lo que en ningún momento se podría encontrar su límite por sustitución directa; sin embargo, a través de la gráfica de la función nos podemos dar cuenta que el límite sí existe, y es $-\frac{1}{6}$, tal y como nos lo muestra la siguiente imagen:



Ejemplo 4:

La altura de un objeto a los t segundos, después de dejarlo caer desde 1000 pies, está dada por la función de posición $s(t)=-16t^2+1000$. La velocidad en el instante $t=a$ segundos viene dada por:

$$\lim_{t\to a}\frac{s(a)-s(t)}{a-t}$$

Si a un obrero de la construcción se le cae una llave inglesa desde una altura de 1000 pies, ¿con qué velocidad estará cayendo la llave tras 5 segundos?

Solución:

Para averiguar la velocidad que lleva el objeto a los 5 segundos exactamente tendremos que calcular $\lim_{t\to 5}\frac{s(5)-s(t)}{5-t}$. Puesto que $s(5)=-16(5)^2+1000=-400+1000=600$, entonces:

$$\lim_{t\to 5}\frac{600-(-16t^2+1000)}{5-t}=\lim_{t\to 5}\frac{600+16t^2-1000}{5-t}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{16t^2-400}{5-t}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{(4t-20)(4t+20)}{5-t}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{-4(5-t)(4t+20)}{5-t}$$
$$=\lim_{t\to 5}\left[-4(4t+20)\right]$$
$$=\lim_{t\to 5}(-16t-80)$$
$$=\left[-16(5)-80\right]$$
$$=-80-80$$
$$=-160$$

Por lo tanto, la velocidad instantánea que lleva el objeto a los 5 segundos es de $-160\ {}^{m}/_{s}$. El signo negativo del resultado es porque el objeto cae.

Hasta ahora hemos visto ejemplos de funciones racionales para las cuales el límite existe, para algunas obteniéndolo por sustitución directa y para otras empleando otros métodos, pero al fin y al cabo lo hallábamos. Ahora citemos un ejemplo de una función racional donde definitivamente no es posible hallar el límite de esta, cuando se hace tender su variable independiente a un número real donde la función no está definida.

Ejemplo 5:

Calcular $\lim_{x\to -4}\frac{1}{x+4}$

Solución:

Sustituyamos de forma directa,

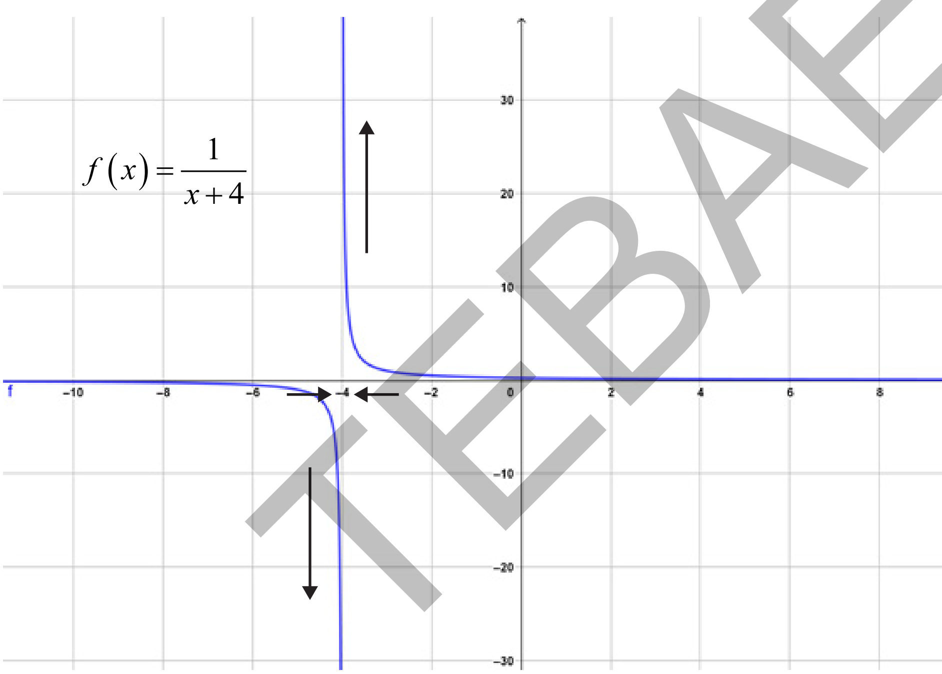
$$\lim_{x\to -4}\frac{1}{x+4}=\frac{1}{-4+4}=\frac{1}{0}$$

Observamos que tenemos problemas, es precisamente con el cero que aparece en el denominador de la última fracción. Más aún, si te fijas la función $f(x)=\frac{1}{x+4}$ es la más simple la cual no se puede manipular a través de una factorización. Por lo que no nos queda otro método a emplear, más que el de los limites laterales, es decir, acercarnos a -4 e ir fijándonos si las imágenes bajo la función se acercan a un límite.

Valores de x a la izquierda de -4.	$f(x)=\frac{1}{x+4}$
-5	-1
-4.5	-2
-4.1	-10
-4.01	-100
-4.001	-1000

Valores de x a la derecha de -4.	$f(x)=\frac{1}{x+4}$
-3	1
-3.5	2
-3.9	10
-3.99	100
-3.999	1000

Si analizamos las tabulaciones hechas, observamos que si tendemos por la izquierda al valor de -4, las imágenes tienden a valores negativos muy grande $(-\infty)$; mientras que si tendemos por la derecha a -4, las imágenes tienden a valores muy grandes, pero positivos $(+\infty)$, por lo que concluimos que $\lim\limits_{x\to -4}\frac{1}{x+4}$ no existe. Miremos gráficamente la situación:



Aplico lo aprendido

I. En los siguientes ejercicios, encuentra el límite de las funciones racionales, utilizando los métodos mostrados anteriormente. Intenta hallarlo en primer lugar por sustitución directa, en caso de que no se pueda hallar así, checa si es factible aplicar factorización o por último intenta encontrarlo haciendo una tabulación, apoyándote de la gráfica de la función. Recuerda que el límite no siempre existe, pero que, si este fuera el caso, también debes dar un argumento convincente de esto.

1. $\lim_{x \to 7} \frac{x^2-49}{x-7}$
2. $\lim_{x \to -5} \frac{x^2-25}{x+5}$
3. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-9x}{x^2-x-6}$
4. $\lim_{x \to 4} \frac{4x-16}{x^2-16}$
5. $\lim_{x \to 3} \frac{5x-15}{x}$
6. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$
7. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$
8. $\lim_{x \to 7} \frac{1}{x-7}$
9. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-12x+35}{x^2-2x-15}$
10. $\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{2x^2+3x}{2x^2+x-3}$
11. $\lim_{x \to 4} \left(\frac{1-2x}{x+4}\right)^2$
12. $\lim_{x \to 6} \frac{x-6}{x^2-8x+12}$

Límites de funciones irracionales

Como sabemos, las funciones irracionales son parte de la clasificación de las funciones algebraicas y son aquellas funciones en cuya expresión analítica la variable independiente aparece debajo del símbolo de un radical. Para este tipo de funciones también debemos tener mucha precaución al calcular sus límites; ya que para algunos casos, se cae en indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$. Para ello, te mostramos algunos ejemplos y los métodos que hay que seguir, en caso de que el límite no se pueda hallar por sustitución directa.

Ejemplo 1:

Calcular $\lim_{x \to 9} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

Solución:

Primero intentemos por sustitución directa,

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{9-4}{\sqrt{9}-2} = \frac{5}{3-2} = \frac{5}{1} = 5$$

Como podemos apreciar el límite es posible obtenerlo fácilmente por sustitución; ya que en la parte del denominador al sustituir el valor de 9, este no se anula. Por lo tanto, el límite de la función existe y es 5.

Pero qué pasa si ahora hacemos tender x a 4. Esto es,

Ejemplo 2:

Calcular $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

Solución:

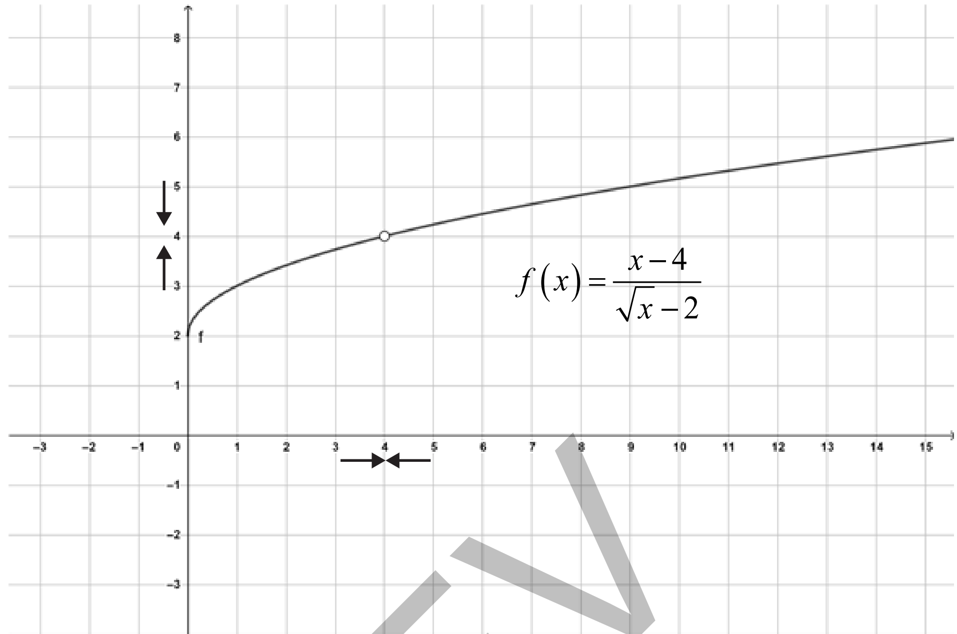
Tratemos por sustitución directa,

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}$$

En este caso hemos fallado al encontrar el límite, bien porque no existe o tal vez sí existe, pero debemos emplear un artificio para conseguirlo. Efectivamente, para estos casos emplearemos el **método de racionalización**; que consiste en multiplicar el denominador y el numerador de la función por el conjugado de $\left(\sqrt{x}-2\right)$, es decir multiplicaremos por $\left(\sqrt{x}+2\right)$, y tratar de encontrar de esta manera una función equivalente a la original en donde sea más fácil hallar el límite por sustitución directa. **Cabe aclarar que, para racionalizar una función de este tipo, siempre se multiplicará (numerador y denominador) por el conjugado de la expresión donde aparezca el radical.** Veamos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)} \\
&= \lim_{x \to 4} \sqrt{x}+2 \\
&= \sqrt{4}+2 \\
&= 2+2 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 4$. Gráficamente veamos cómo se comporta dicha función:



La función tiene un salto en $x=4$, es por eso que el límite no se pudo hallar por sustitución directa. Otro método para obtener este límite sería aplicando el método de los límites laterales, lo cual se te deja como ejercicio.

Ejemplo 3:

Una piscina se vacía según la función: $V(t)=\dfrac{2-\sqrt{t-3}}{t^2-49}$ donde V es el volumen expresado en m^3 y t es el tiempo en minutos. ¿a qué valor se aproxima el volumen cuando el tiempo se aproxima a 7 minutos?

Solución:

El problema nos manda a calcular el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{t\to 7}\frac{2-\sqrt{t-3}}{t^2-49}$. Así, utilizando el método de racionalización:

$$\lim_{t\to 7}\frac{2-\sqrt{t-3}}{t^2-49}=\lim_{t\to 7}\frac{2-\sqrt{t-3}}{t^2-49}\cdot\frac{2+\sqrt{t-3}}{2+\sqrt{t-3}}$$

$$=\lim_{t\to 7}\frac{4-\left(\sqrt{t-3}\right)^2}{\left(t^2-49\right)\left(2+\sqrt{t-3}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 7}\frac{4-(t-3)}{(t-7)(t+7)\left(2+\sqrt{t-3}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 7}\frac{4-t+3}{(t-7)(t+7)\left(2+\sqrt{t-3}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 7}\frac{7-t}{(t-7)(t+7)\left(2+\sqrt{t-3}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 7}\frac{-(t-7)}{(t-7)(t+7)\left(2+\sqrt{t-3}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 7}\frac{-1}{(t+7)\left(2+\sqrt{t-3}\right)}$$

$$=\frac{-1}{(7+7)\left(2+\sqrt{7-3}\right)}$$

$$=\frac{-1}{(14)(4)}$$

$$=-\frac{1}{56}$$

Interpretando el resultado, podemos decir que la piscina se vacía un poco antes de los 7 minutos; puesto que el valor del volumen de la piscina, para cuando nos acercamos a los 7 minutos, este ya ha rebasado el valor de cero ($-\frac{1}{56}$) que es cuando la piscina se queda vacía totalmente.

Por último, analizaremos un caso muy particular en los límites de funciones irracionales; y consiste en la necesidad de emplear los límites laterales, tal como los hemos venido trabajando en muchos ejercicios, pero de una manera muy precisa. Así que te sugerimos poner atención al siguiente ejemplo:

Ejemplo 4:

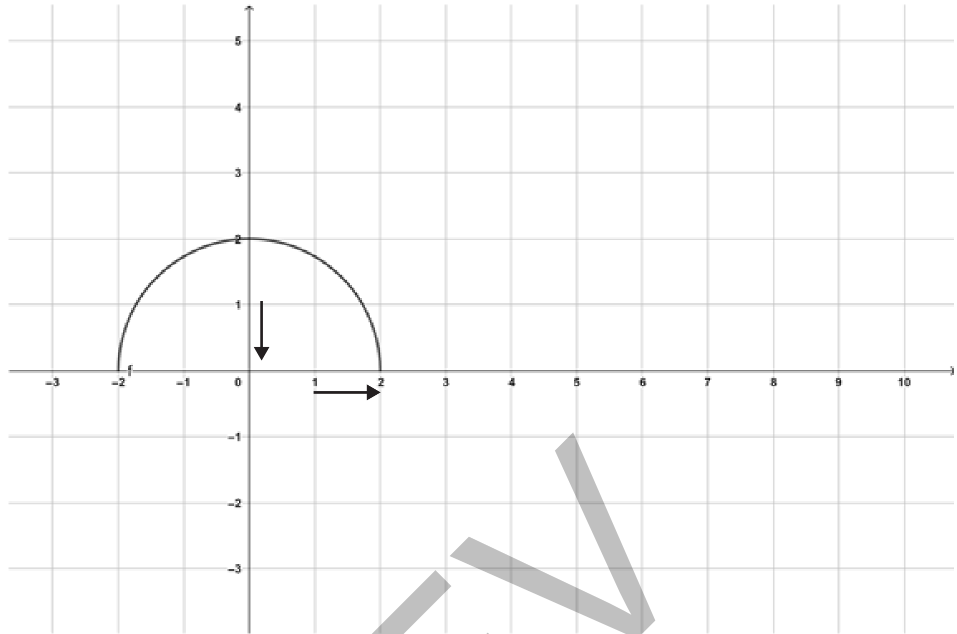
Utilizando los limites laterales, calcular $\displaystyle lím_{x \to 2} \sqrt{4-x^2} =$

Valores de x a la izquierda de 2.	$f(x)=\sqrt{4-x^2}$
1	1.7320
1.5	1.3228
1.9	0.6244
1.99	0.1997
1.999	0.0632
1.9999	0.0199

Valores de x a la derecha de 2.	$f(x)=\sqrt{4-x^2}$
3	No existe imagen
2.5	No existe imagen
2.1	No existe imagen
2.01	No existe imagen
2.001	No existe imagen
2.0001	No existe imagen

Observa que si nos acercamos a 2 por la izquierda, las imágenes tienden a 0; mientras que si nos acercamos a 2 por la derecha, las imágenes de estos valores no existen en los números reales, ya que el dominio para esta función se encuentra solo en el intervalo $[-2,2]$ y para valores mayores a 2 estrictamente, las imágenes son imaginarias, por lo que no se puede decir que tiendan a algún número. Para este caso, se podría decir que $\displaystyle lím_{x \to 2} \sqrt{4-x^2}$ no tiene significado. Pero si de cualquier forma, se restringe x a números menores, muy cercanos a 2, puede lograrse que el valor de $\sqrt{4-x^2}$ esté tan cerca de cero como se desee. En tal caso, x se aproxima a 2 sólo por la izquierda, estableciendo que el límite para función sea igual cero.

Miremos gráficamente la forma de la función, para comprender mejor este caso:



El ejemplo anterior, nos obliga a definir los límites por la izquierda y por la derecha de una función:

Definición

Se establece que el **límite por la izquierda de una función** f, cuando x tiende a c, es L, si al tomar valores cada vez más próximos a c, pero menores que este, las imágenes de f se aproximan a L tanto como sea necesario. Lo que denotaremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Se lee "el límite de f, cuando x tiende a c por la izquierda, es L.

De igual manera definimos, el límite por la derecha (o el límite lateral derecho):

Definición

Se establece que el **límite por la derecha de una función** f, cuando x tiende a c, es L, si al tomar valores cada vez más próximos a c, pero mayores que este, las imágenes de f se aproximan a L tanto como sea necesario. Lo que denotaremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Se lee "el límite de f, cuando x tiende a c por la derecha, es L.

Así, a partir de la primera definición, se puede escribir, para el ejemplo anterior, lo siguiente:

$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

Se lee "el límite de la función $f(x) = \sqrt{4- \ x^2}$, cuando x tiende a 2 por la izquierda, es igual a cero".

A partir de las anteriores definiciones se puede enunciar un teorema que enlaza a los límites laterales con el límite de una función a secas

Teorema

El $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L si y solo si $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

Aunque este teorema ya lo hemos utilizado implícitamente en algunos ejercicios durante este bloque, por el momento sólo lo mencionaremos y omitiremos su demostración.

Aplico lo aprendido

I. Resuelve los siguientes ejercicios aplicando las técnicas señaladas anteriormente sobre funciones irracionales.

1. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$
2. $\lim\limits_{x \to 15} \dfrac{\sqrt{x+1}-4}{x-15}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{16+x}-4}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$
5. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
6. $\lim\limits_{x \to -1} x\sqrt{1-x^2}$
7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
8. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$
9. $\lim\limits_{x \to 7} \sqrt{3x+4}$
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

Límites de funciones trascendentes

Como sabemos, las funciones trascendentes son aquellas que no pueden ser expresadas mediante un polinomio, un cociente de polinomios o raíces de polinomios. Las funciones trascendentes elementales son las exponenciales, las logarítmicas, las trigonométricas, las funciones trigonométricas inversas, las hiperbólicas y las hiperbólicas inversas. Aquí sólo analizaremos los límites de funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Límites de funciones trigonométricas

Para encontrar los límites de las funciones trigonométricas se recomienda en primera instancia hacerlo por sustitución directa, sin pasar por alto que los ángulos en las funciones trigonométricas deben estar en radianes. Para los casos en que se llegase a tener una indeterminación se recomienda manipular la función trigonométrica con alguna identidad trigonométrica (vistas en el curso de Matemáticas II, segundo semestre) y checar si es factible encontrar un límite. Una última opción es intentar hallarlo utilizando los límites laterales (tabulación) y apoyarse en la gráfica de la función trigonométrica; la cual puedes obtener de los *softwares GeoGebra* o *Graphmatica* disponibles para descargar en línea. En conclusión, recuerda que anteriormente tratamos con ejemplos donde pareciera que el límite no existía, pero que a través de un artificio podíamos encontrarlo; aunque también cabe señalar que no siempre esto es así, lo que sí es prudente tener en cuenta, es una forma convincente de probar la existencia o no del límite.

A continuación, te mostramos algunos ejemplos:

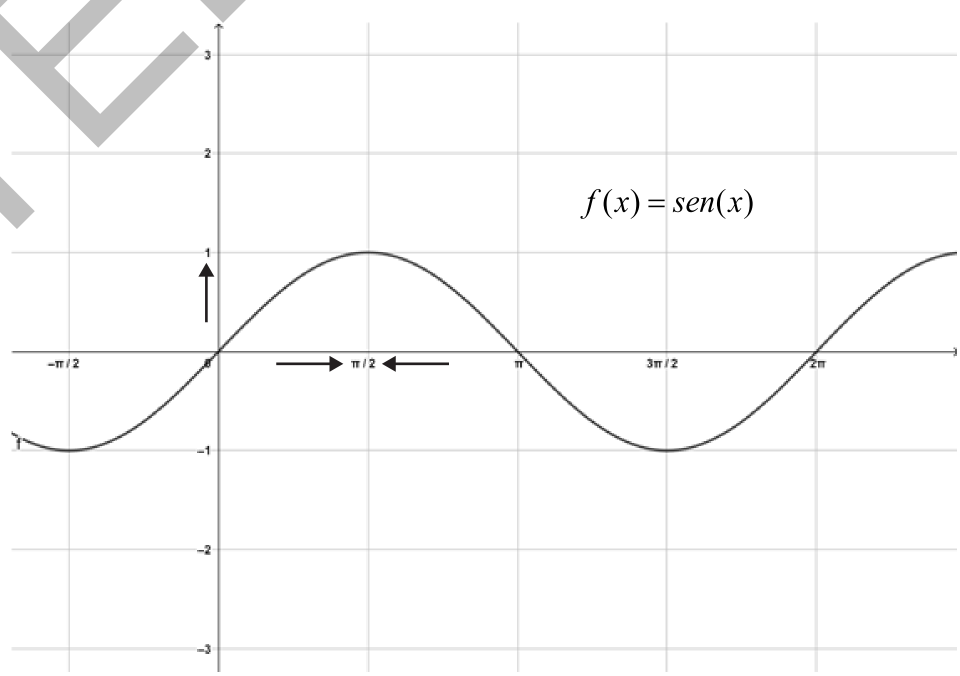
Ejemplo 1:

Calcular $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} sen(x)$

Solución:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} sen(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Gráficamente



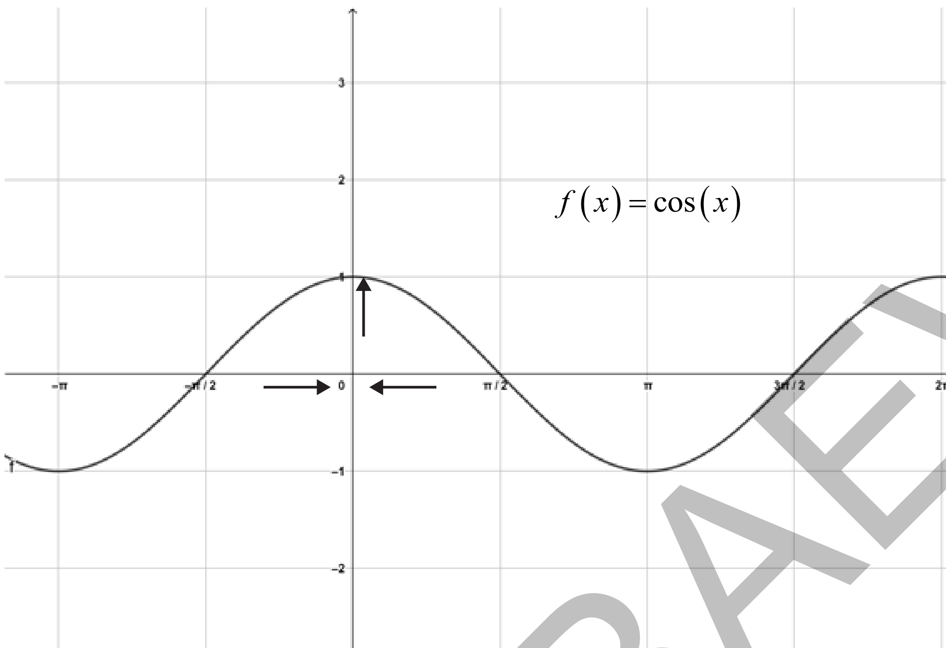
Ejemplo 2:

Calcular $\lim_{x \to 0} \cos(x)$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$$

Gráficamente:



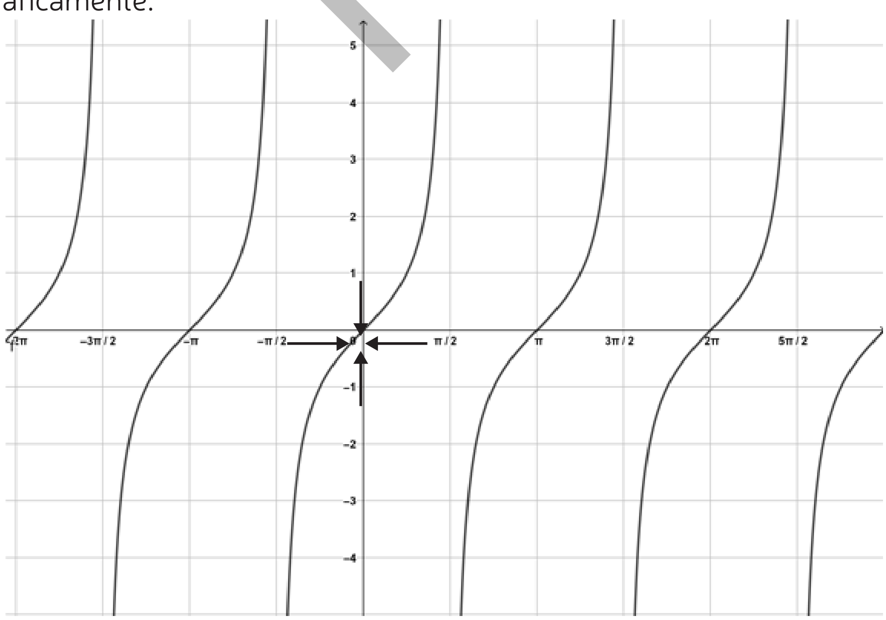
Ejemplo 3:

Calcular $\lim_{x \to 0} \tan(x)$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \tan(x) = \tan(0) = 0$$

Gráficamente:



Ejemplo 4:

A partir de la gráfica anterior también se puede afirmar que:

$$\lim_{x\to\pi} \tan(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \text{ no existe}$$

Ejemplo 5:

Hallar $\lim_{x\to 0}\left(sen(x) + 2\sec(x)\right)$

Solución:

Aplicando propiedades de límites e identidades trigonométricas:

$$\lim_{x\to 0}\left(sen(x) + 2\sec(x)\right) = \lim_{x\to 0} sen(x) + 2\lim_{x\to 0} \sec(x)$$

$$= sen(0) + 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} \longleftarrow \text{Aplicando } \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$= 0 + 2\left(\frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0}\cos(x)}\right)$$

$$= 0 + 2\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$= 0 + 2(1)$$

$$= 0 + 2$$

$$= 2$$

Ejemplo 6:

Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)$

Solución:

Por sustitución directa:

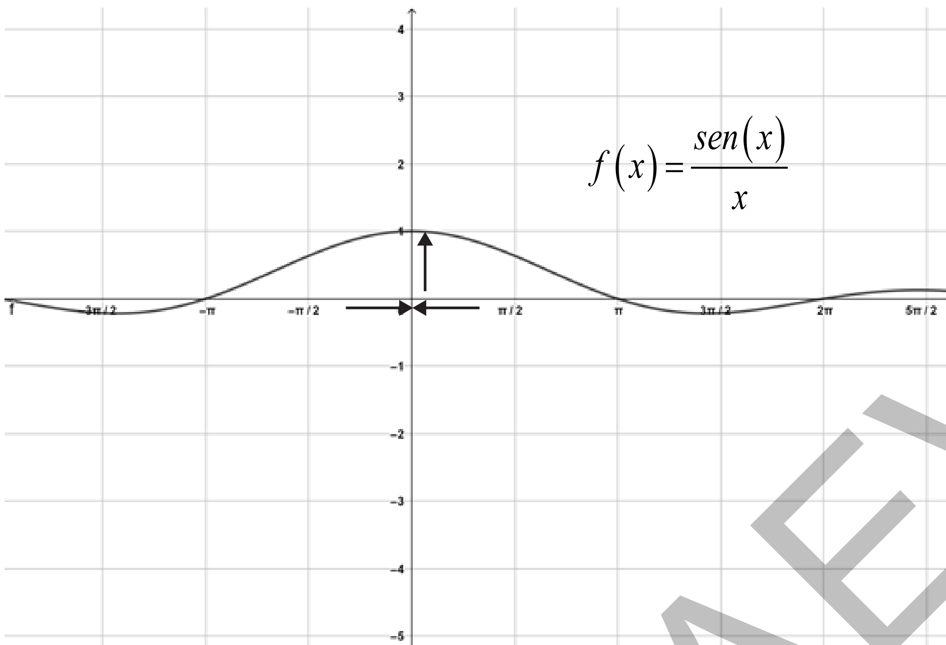
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = \frac{sen(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Observa que llegamos a una indeterminación y que no podemos factorizar, ni racionalizar, ni aplicar una identidad trigonométrica que nos facilite el cálculo; ante esta situación solo nos queda aplicar los límites laterales.

Valores de x a la izquierda de 0.	$f(x) = \frac{sen(x)}{x}$
-1	0.8414
-0.5	0.9588
-0.1	0.9983
-0.01	0.999983
-0.001	0.99999983

Valores de x a la derecha de 0.	$f(x) = \frac{sen(x)}{x}$
1	0.8414
0.5	0.9588
0.1	0.9983
0.01	0.999983
0.001	0.99999983

Con los límites laterales, nos damos cuenta que al tender x a cero, las imágenes bajo la función $f(x)=\frac{sen(x)}{x}$ tienden a 1. Gráficamente:



Por lo tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$

Aplico lo aprendido

I. Resuelve los siguientes ejercicios aplicando las técnicas señaladas anteriormente sobre funciones trigonométricas.

1. $\lim_{x\to 0}(\tan x+\sec x)$
2. $\lim_{x\to -\frac{3\pi}{2}}(2+\cos\ x)$
3. $\lim_{x\to -\pi}(5\cos x+2senx)$
4. $\lim_{x\to 0}(4+3sen(x))$
5. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(3sen^2(x))$
6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x+\csc x)$
7. $\lim_{x\to 0}(3sen(x))$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

Límites de funciones logarítmicas

Las funciones logarítmicas pertenecen a la clasificación de las funciones trascendentes y al igual que para las funciones trigonométricas, seguiremos las mismas recomendaciones al momento de calcular sus límites. Aclaramos también, que en este apartado solo trabajaremos con los dos logaritmos más comunes: el logaritmo natural $(\ln)$ y el logaritmo de base 10. A continuación, te mostramos algunos ejemplos sencillos:

Ejemplo 1:

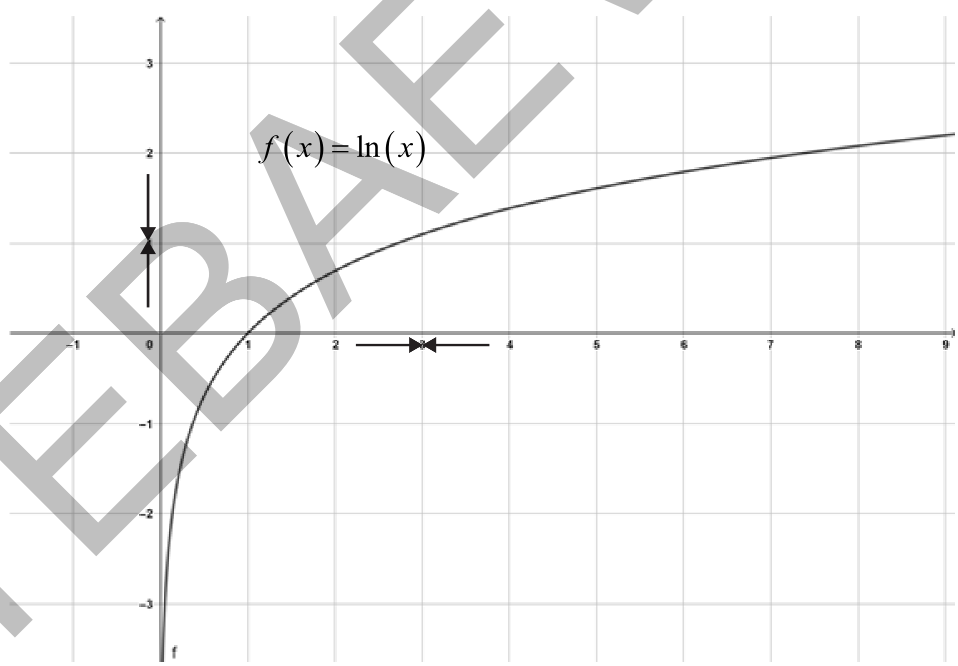
Hallar $\lim_{x\to 3} \ln(x)$

Solución:

Por sustitución directa,

$$\lim_{x\to 3} \ln(x) = \ln(3) = 1.0986$$

Mirando la gráfica de la función:



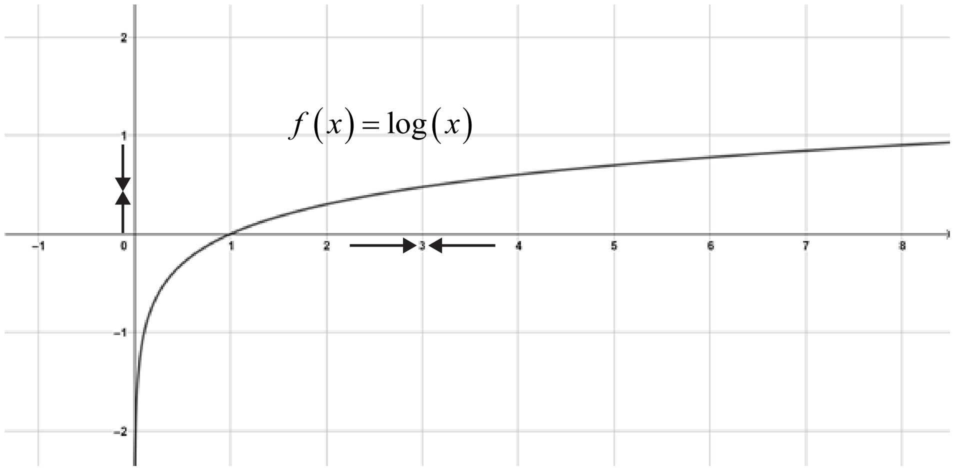
Ejemplo 2:

Encuentra $\lim_{x\to 3} (\log(x))$

Solución:

Por sustitución directa,

$$\lim_{x\to 3} (\log(x)) = \log(3) = 0.4771$$



Ejemplo 3:

Calcular $\lim\limits_{x \to 5} \left(x + \log(x+95) \right)$

Solución:

$$\lim_{x \to 5} \left(x + \log(x+95) \right) = \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} \left[\log(x+95) \right]$$

$$= 5 + \log(5+95)$$

$$= 5 + \log(100)$$

$$= 5 + 2$$

$$= 7$$

En este ejercicio, de inicio se aplicó la propiedad del límite de una suma de funciones; luego se calcularon los límites sobre la función identidad y sobre la función logaritmo por sustitución directa, y así obtener el resultado.

Aplico lo aprendido

I. Encuentra los siguientes límites de funciones logarítmicas. Apóyate de las gráficas de las funciones

1. $\lim\limits_{x \to 2} \left(x - \ln(x+7) \right)$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 3} \log(x-2)$
4. $\lim\limits_{x \to 9} \left(\ln(x^2 - 21) \right)$
5. $\lim\limits_{x \to 100} \left(\log x - 1 \right)$
6. $\lim\limits_{x \to 10} \left(\log x - 1 \right)$

Límites de funciones exponenciales

Por último, analizaremos los límites de funciones exponenciales. Al igual que las funciones analizadas anteriormente, en estas también se vale usar la sustitución directa como primera opción para encontrar sus límites, o en su defecto, utilizar algún artificio ingenioso o aplicar en última instancia los límites bilaterales apoyándonos siempre por la gráfica de la función en cuestión. Para ello, te presentamos algunos ejemplos sencillos:

Ejemplo 1:

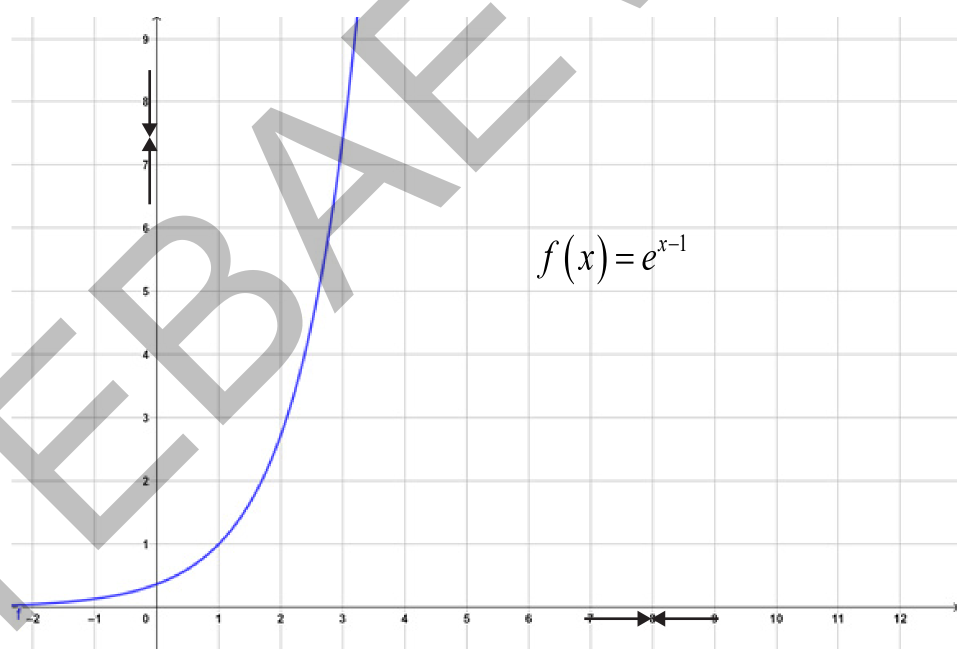
Calcular $\lim\limits_{x\to 3}\left(e^{(x-1)}\right)$

Solución:

Sustituyendo,

$$\lim_{x\to 3}\left(e^{(x-1)}\right)=e^{((3)-1)}=e^{(2)}=7.3890$$

Gráficamente comprobamos,



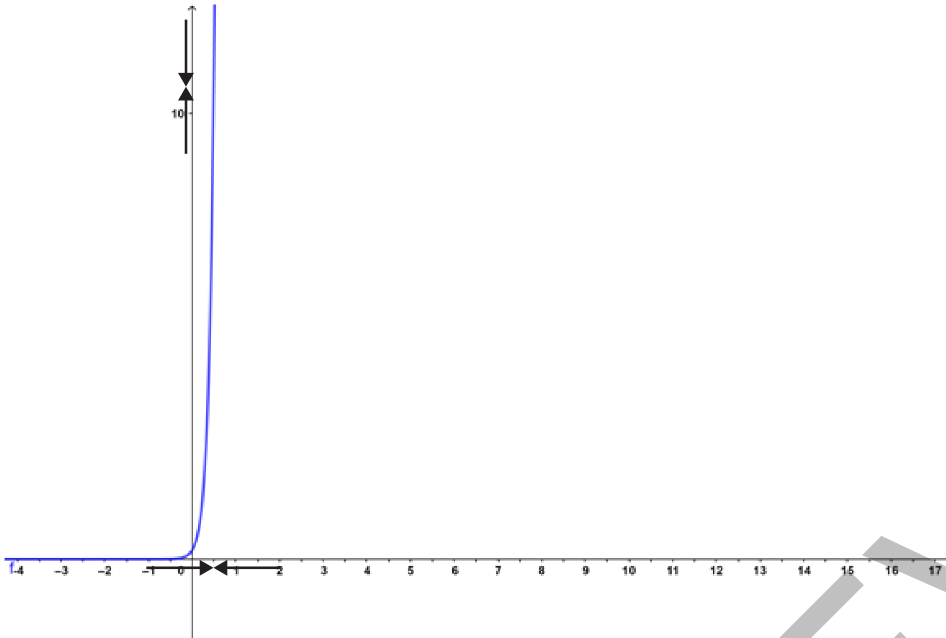
Ejemplo 2:

Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 5^{5x-1}$

Solución:

Sustituyendo nuevamente,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} 5^{5x-1}=5^{5\left(\frac{1}{2}\right)-1}=5^{\frac{5}{2}-1}=5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{5^3}=\sqrt{125}=11.18$$



Aplico lo aprendido

I. Calcula los siguientes límites sobre funciones exponenciales.

1. $\lim\limits_{x \to 6} \left[\dfrac{x}{3} + 6^{\frac{x}{3}} \right]$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{e^{5x}}{2^x}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} (3)^{5x-1}$

4. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

5. $\lim\limits_{x \to -3} \left(e^{5-x} \right)$

6. $\lim\limits_{x \to 5} \left(2^x - 1^x \right)$

Límites infinitos

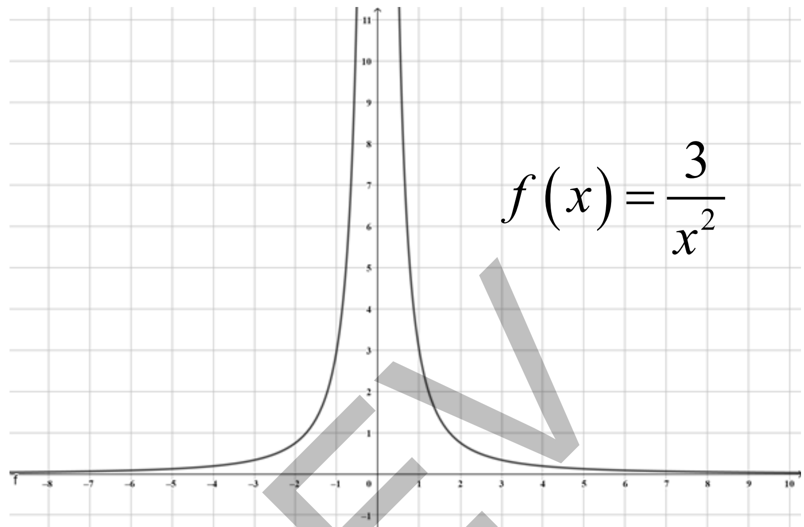
En este apartado, estudiaremos a las funciones cuyas imágenes crecen o decrecen sin límite conforme su variable independiente se acerca cada vez más a un número real fijo. Para iniciar nuestro estudio, analicemos el siguiente:

Ejemplo:

Hallemos $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x^2}$

A través de la gráfica podemos observar que el dominio de la función

$f(x)=\frac{3}{x^2}$ es el conjunto de todos los números reales excepto el 0, mientras que su contradominio es el conjunto de todos los números reales positivos:



Observa también que si a x le damos valores muy cercanos a 0, tanto por la derecha como por la izquierda, las imágenes de f crecen indefinidamente hacia valores positivos demasiado grandes. Hagamos una tabulación para corroborar:

Valores de x a la izquierda de 0.	$f(x)=\frac{3}{x^2}$
-1	3
-0.5	12
-0.1	300
-0.01	30000
-0.001	3000000
-0.0001	300000000

Valores de x a la derecha de 0.	$f(x)=\frac{3}{x^2}$
1	3
0.5	12
0.1	300
0.01	30000
0.001	3000000
0.0001	300000000

A partir de la gráfica y las tabulaciones se observa que $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3}{x^2}=+\infty$ y que $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3}{x^2}=+\infty$. Por lo tanto, afirmamos que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^2}=+\infty$, lo cual quiere decir que si los valores de x están muy próximo a 0, entonces las imágenes bajo la función $f(x)=\frac{3}{x^2}$ crecen demasiado, infinitamente hacia valores positivos. Cabe aclarar que, en este caso, el límite de la función no existe; puesto que el símbolo $+\infty$ no es un número real y aquí solo representa el comportamiento de los valores de la función $f(x)=\frac{3}{x^2}$ cuando x se aproxima cada vez más a 0.

Definición

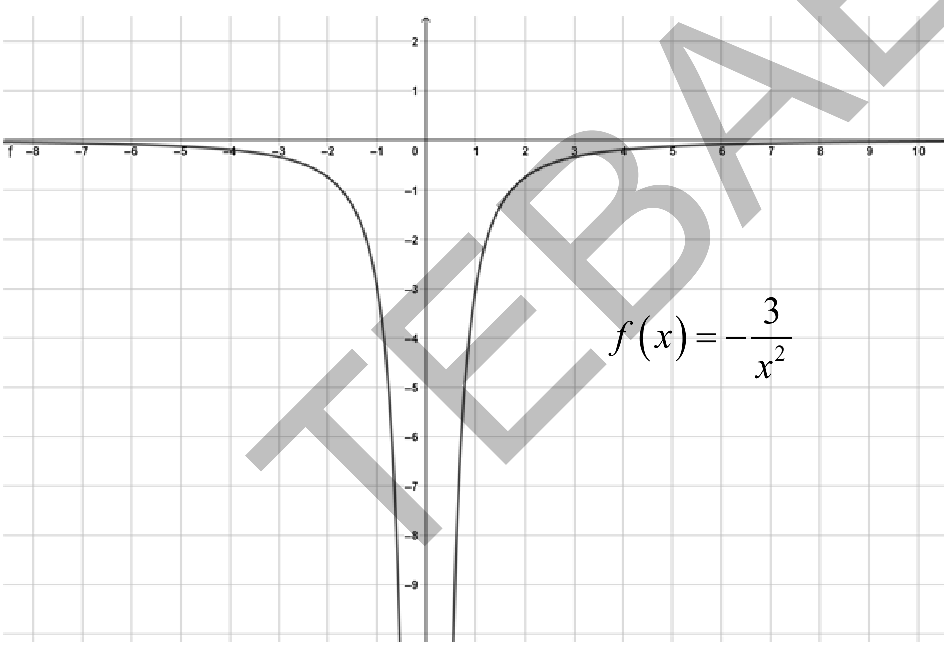
Los valores de una función crecen sin límite conforme x tiende a un número c, si $f(x)$ puede hacerse tan grande como se desee (esto es, mayor que cualquier número positivo N), para todos los valores de x suficientemente cercanos a c, pero sin considerar a c mismo.

Analicemos ahora una función para la cual los valores de sus imágenes decrezcan sin límite, cuando hagamos tender su variable independiente hacia un número real. Para esto, proponemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Hallar $\lim_{x\to 0} -\frac{3}{x^2}$.

En primer lugar, observemos gráficamente la función:



En seguida consideremos una tabulación, acercándonos al valor de 0, tanto por la izquierda como por la derecha, con valores muy próximos:

Valores de x a la izquierda de 0.	$f(x)=-\frac{3}{x^2}$
-1	-3
-0.5	-12
-0.1	-300
-0.01	-30000
-0.001	-3000000
-0.0001	-300000000

Valores de x a la derecha de 0.	$f(x)=-\frac{3}{x^2}$
1	-3
0.5	-12
0.1	-300
0.01	-30000
0.001	-3000000
0.0001	-300000000

De esta manera, tenemos que $\displaystyle \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=-\infty$ y que $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=-\infty$, es decir, los límites laterales decrecen a valores negativos demasiado grandes. De aquí que $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=-\infty$, y nuevamente reiteramos que el límite no existe; ya que el símbolo $-\infty$ no es un número real, sólo es un símbolo que nos indica que las imágenes de la función $f(x)=-\frac{3}{x^2}$ decrecen infinitamente, cuando hacemos tender x hacia valores muy cercanos a cero.

Para este caso presentamos la siguiente definición:

Definición
Los valores de una función decrecen sin límite conforme x tiende a un número c, si $f(x)$ puede hacerse tan pequeña como se desee (esto es, menor que cualquier numero negativo N), para todos los valores de x suficientemente cercanos a c, pero sin considerar a c mismo.

Por último, presentemos el caso de límites infinitos laterales. Para esto, calculemos el límite de una función, pero de tal manera que su límite por la izquierda decrezca infinitamente y que su límite por la derecha crezca hacia valores positivos muy grandes. Para ello propongamos el siguiente:

Ejemplo:

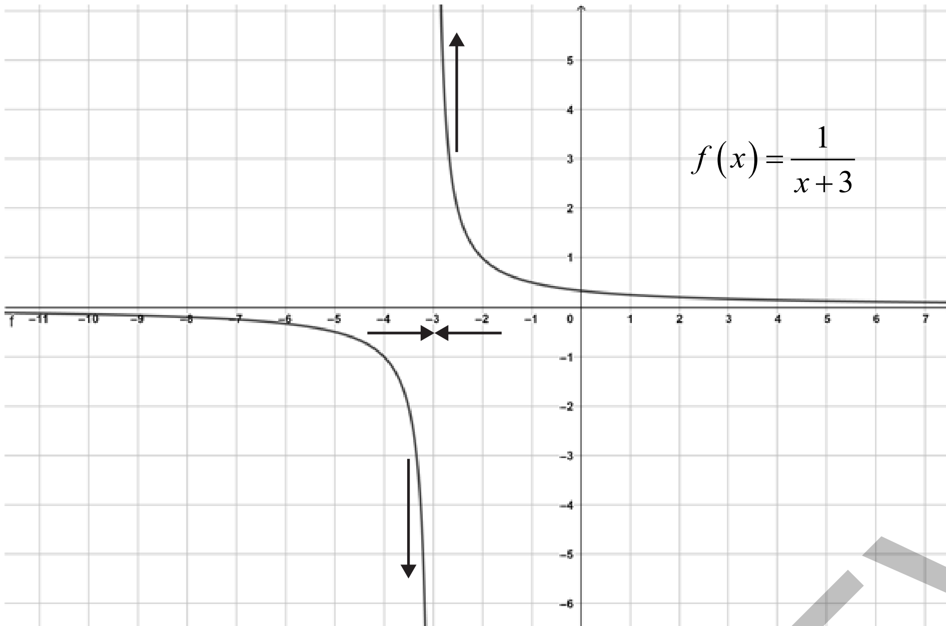
Hallar el siguiente límite $\displaystyle \lim_{x\to -3}\frac{1}{x+3}$

Ayudémonos de una tabulación, acercándonos a -3, tanto por la izquierda como por la derecha, con valores muy próximos.

Valores de x a la izquierda de -3.	$f(x)=\frac{1}{x+3}$
-4	-1
-3.5	-2
-3.1	-10
-3.01	-100
-3.001	-1000
-3.0001	-10000

Valores de x a la derecha de -3.	$f(x)=\frac{1}{x+3}$
-2	1
-2.5	2
-2.9	10
-2.99	100
-2.999	1000
-2.9999	10000

Para apoyar más nuestro resultado, grafiquemos la función en cuestión:



A partir de las tabulaciones hechas y la gráfica, notamos que $\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{1}{x+3}=-\infty$ y que $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{1}{x+3}=+\infty$, esto es, que los límites infinitos laterales difieren cuando nos aproximamos a -3. De esta manera no podemos hablar en absoluto del $\lim\limits_{x\to -3}\frac{1}{x+3}$ y solo nos quedaremos con la información que nos proporcionan los límites infinitos laterales.

Esto es, para la función $f(x)=\frac{1}{x+3}$, conforme x se aproxima a -3, a través de valores menores que -3, los valores decrecen sin límite; mientras que cuando x se aproxima a -3, mediante valores mayores que -3, los valores de la función crecen sin límite.

Aplico lo aprendido

I. Como actividad, te invitamos a proponer una función $f(x)$ en la que se den los últimos dos casos de límites infini os laterales: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=-\infty$.

II. Desarrolla lo que se te indique en los siguientes ejercicios.

1. Calcula $\displaystyle \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x+1}$ usando una tabla de valores.

2. Calcula los siguientes límites, usando una tabla de valores y apoyándote en la gráfica de la función

a) $\displaystyle \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x-3}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3}$

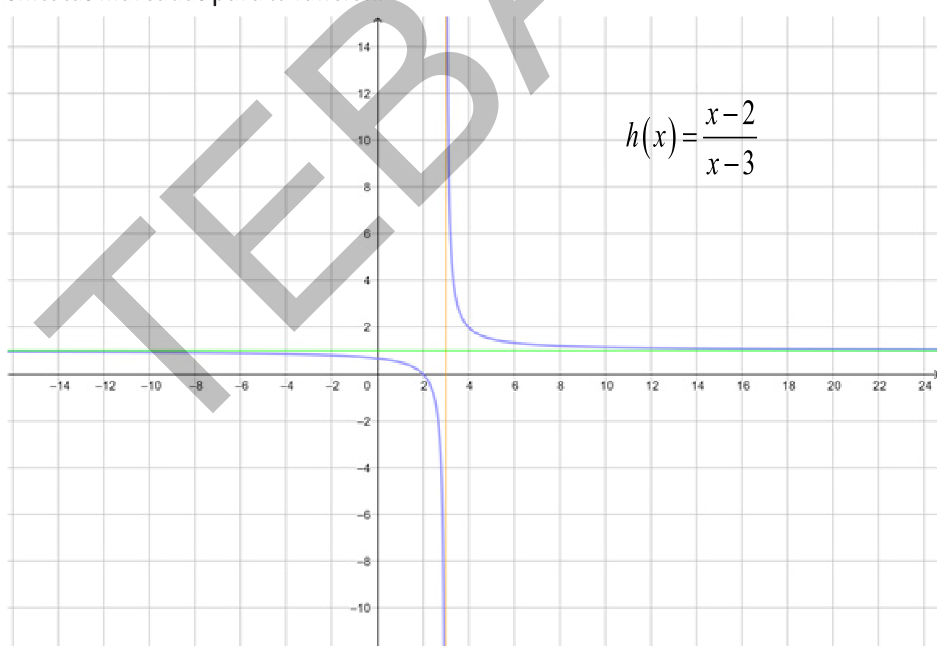
3. Halla los siguientes límites usando la gráfica de las funciones

a) $\displaystyle \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1}$

c) Escribe la ecuación de la asíntota vertical de $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

4. A partir de la gráfica de la función $h(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$, encuentra los siguientes límites.
Apóyate de las asíntotas marcadas para la función.



a) $\displaystyle \lim_{x\to 3^-} \frac{x-2}{x-3}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{x-3}$

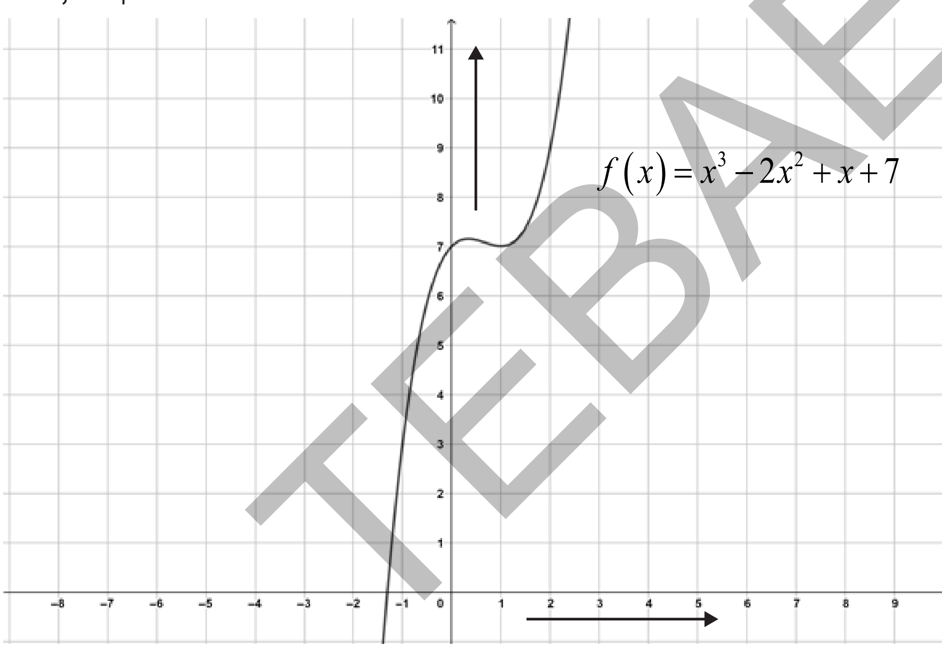
c) $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x-3}$

Límites al infinito
En este último apartado, revisaremos los límites de funciones cuando la variable independiente crece o decrece infinitamente, los cuales llamamos límites al infinito. Es importante que observes la diferencia entre los límites infinitos vistos anteriormente con los límites al infinito, para que no caigas en confusiones.

Iniciemos nuestro estudio afirmando que el límite de toda función polinómica, cuando hacemos tender su variable independiente x hacia valores positivos demasiadamente grandes, no existe, debido a que toda función polinómica dibuja una curva cuyos extremos crecen o decrecen infinitamente.

Ejemplo:

Consideremos el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^3 - 2x^2 + x + 7\right)$ para comprobar lo dicho anteriormente. Para ello, simplemente analicemos la gráfica que dibuja el polinomio:



A partir de la gráfica, se observa que si a x le damos valores muy grandes ($x \to -\infty$), las imágenes bajo el polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 7$ también tienden a tomar valores grandes. Por lo tanto, concluimos que $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^3 - 2x^2 + x + 7\right)$ no existe. Si observamos cuidadosamente la gráfica, sucede algo análogo, si ahora a x la hacemos tender hacia valores negativos muy grandes ($x \to -\infty$), concluyendo en este caso que, $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(x^3 - 2x^2 + x + 7\right)$ tampoco existe.

Aclaremos que cuando se escribe $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ no tiene un significado similar al que se tiene cuando se escribe, por ejemplo, $x \to 5$;

ya que $+\infty$ o $-\infty$ no son números reales, simplemente son símbolos que nos indican que x tiende hacia valores muy grandes positivos o negativos respectivamente.

Pero no todas las funciones se comportan como la función polinómica, veamos un caso distinto donde el límite sí exista, al tender la variable independiente hacia valores muy grandes positivos.

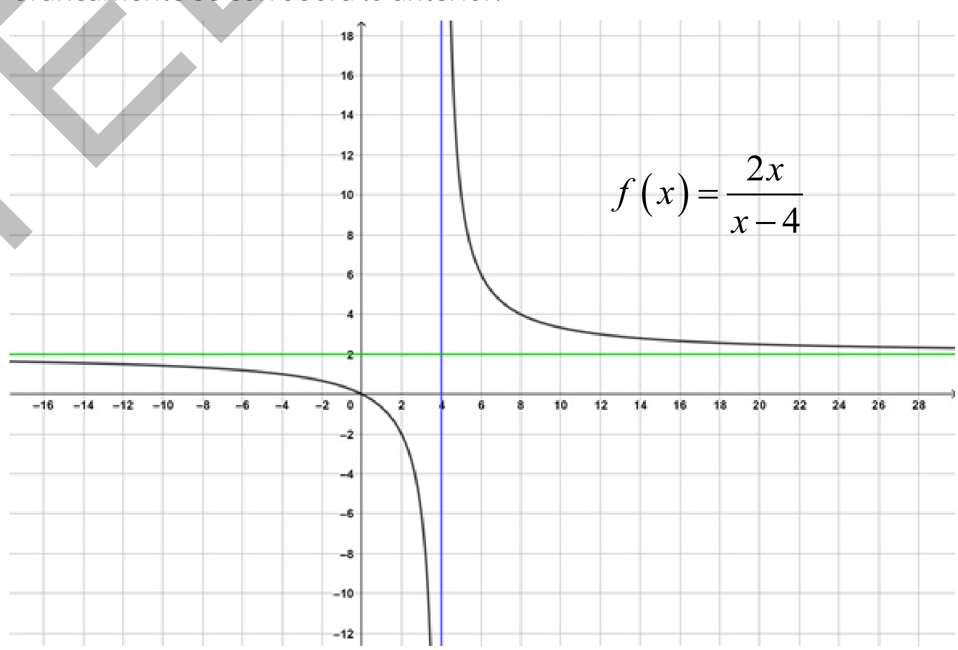
Ejemplo:

Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-4}$

En primer lugar, hagamos una tabulación:

Valores de x muy grandes positivos ($x \to +\infty$)	$f(x) = \frac{2x}{x-4}$
10	3.3333
100	2.0833
1000	2.0080
10000	2.0008
100000	2.00008

Observamos que cuando damos valores a x positivos muy grandes las imágenes, bajo la función $f(x) = \frac{2x}{x-4}$, se acercan a $y = 2$, valor por donde pasa la asíntota horizontal de la función (recta color verde). Gráficamente se corrobora lo anterior:



Por lo tanto, concluimos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x-4} = 2$.

Observando nuevamente la gráfica de la función racional $f(x)=\frac{2x}{x-4}$ y su asíntota horizontal marcada en color verde, lo mismo sucedería si ahora x la hiciéramos tender hacia $-\infty$, entonces $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{x-4}=2$.

Analicemos ahora la función racional $f(x)=\frac{1}{x}$, viendo cómo esta se comporta cuando hacemos tender a x hacia valores positivos muy grandes ($x\to+\infty$). Para mostrar esto, empleemos nuevamente una tabulación:

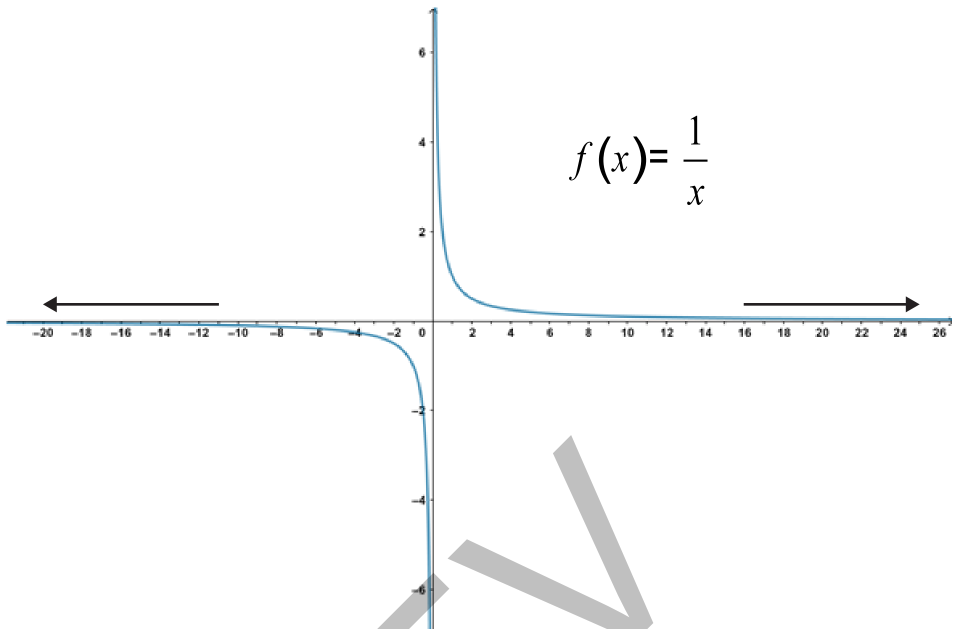
Valores de x positivos muy grandes ($x\to+\infty$)	$f(x)=\frac{1}{x}$
10	0.1
100	0.01
1000	0.001
10000	0.0001
100000	0.00001

De la tabla, nos damos cuenta, muy obviamente, que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Análogamente, comprobemos a través de una tabulación que $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Valores de x negativos muy pequeños ($x\to-\infty$)	$f(x)=\frac{1}{x}$
-10	-0.1
-100	-0.01
-1000	-0.001
-10000	-0.0001
-100000	-0.00001

Efectivamente, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. Gráficamente:



Pero qué sucederá si ahora calculamos $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$. Nuevamente por tabulación tenemos:

Valores de x positivos muy grandes ($x\to+\infty$)	$f(x)=\frac{1}{x^2}$
10	0.1
100	0.0001
1000	0.000001
10000	0.00000001
100000	0.0000000001

De la tabla se sigue que, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

De manera similar, se comprueba que $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$. Pero más aún, también se puede verificar que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$ y que $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$. De aquí, se puede demostrar que: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$ para cualquier n entero positivo. Lo anterior no será demostrado, puesto que para ello se necesitan argumentos matemáticos rigurosos, los cuales no están a nuestro alcance en este curso.

De lo que sí estamos seguros, es que este último resultado es de gran utilidad en el cálculo de límites al infinito en funciones racionales más complejas. Para lo cual, te presentamos algunos ejemplos donde verifiques su empleo y utilidad.

Ejemplo 1:

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-3}{2x+5}$

Solución: En este ejercicio aplicaremos el hecho de que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$, para ello dividiremos el numerador y el denominador de la función racional entre la variable de mayor exponente que contenga (en este caso x), para luego aplicar algunas propiedades de los límites y sacar el resultado.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{5}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}4-3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}2+5\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}$$

Dividiendo entre x

Eliminando variables

$$=\frac{4-3(0)}{2+5(0)}$$

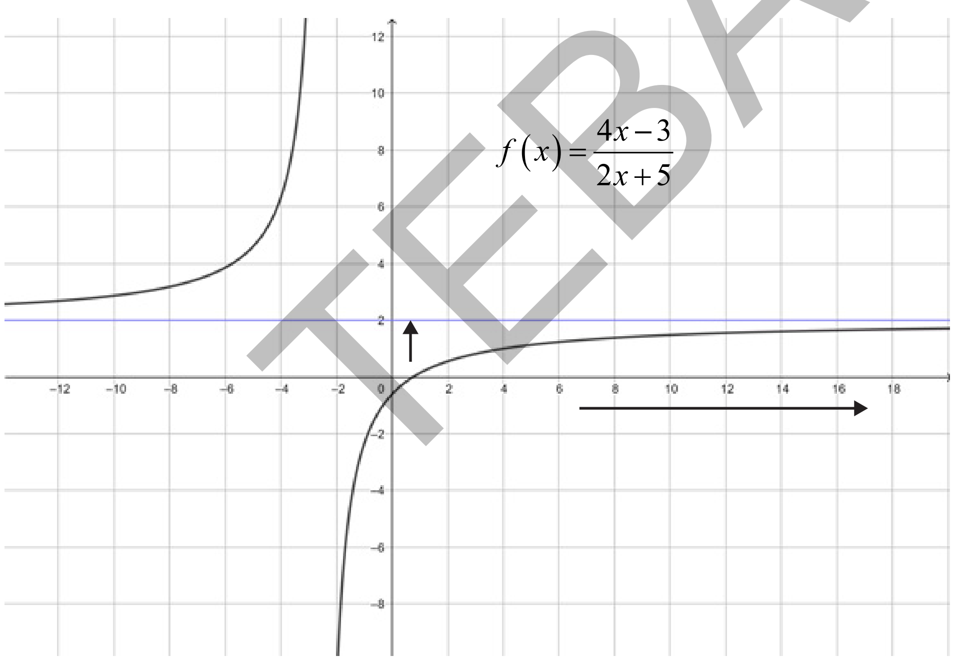
$$=\frac{4-0}{2+0}$$

$$=\frac{4}{2}$$

$$=2$$

Aplicando propiedades de límites: de cociente, de suma y de diferencia.

Gráficamente:



Ejemplo 2:

Cuando se arroja materia orgánica de desecho a un estanque de tratamiento, esta se va oxidando y la cantidad de oxígeno varia con respecto al tiempo (t en semanas) de acuerdo con la siguiente función:

$$O(t)=\frac{t^2-t+1}{t^2+1}$$

a) ¿Qué porcentaje del nivel normal de oxígeno existe en el estanque en la primera semana?

b) ¿Para la quinceava semana?

c) ¿Cuál es el porcentaje de oxígeno para t excesivamente grande?

Solución:

a) Para dar solución a este inciso, simplemente evaluemos $t = 1$, en $O(t)$:

$$O(1) = \frac{(1)^2 - (1) + 1}{(1)^2 + 1} = \frac{1 - 1 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

O sea que el estanque tiene un 50% de oxígeno pasada una semana.

b) Para este inciso, evaluemos $t = 15$,

$$O(15) = \frac{(15)^2 - (15) + 1}{(15)^2 + 1} = \frac{225 - 15 + 1}{225 + 1} = \frac{211}{226} = 0.9336$$

El nivel de oxígeno en el estanque es del 93.36% pasadas quince semanas.

c) Por último, calculemos qué pasa con el porcentaje de oxígeno para cuando t crece demasiado, esto es, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{t^2}{t^2} - \frac{t}{t^2} + \frac{1}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} + \frac{1}{t^2}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{t\to\infty} 1 - \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} + \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}}{\lim\limits_{t\to\infty} 1 + \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}}$$

$$= \frac{1 - 0 - 0}{1 + 0}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

Para valores muy grandes de t, el porcentaje de oxígeno se estabiliza casi en un 100%.

Ejemplo 3:

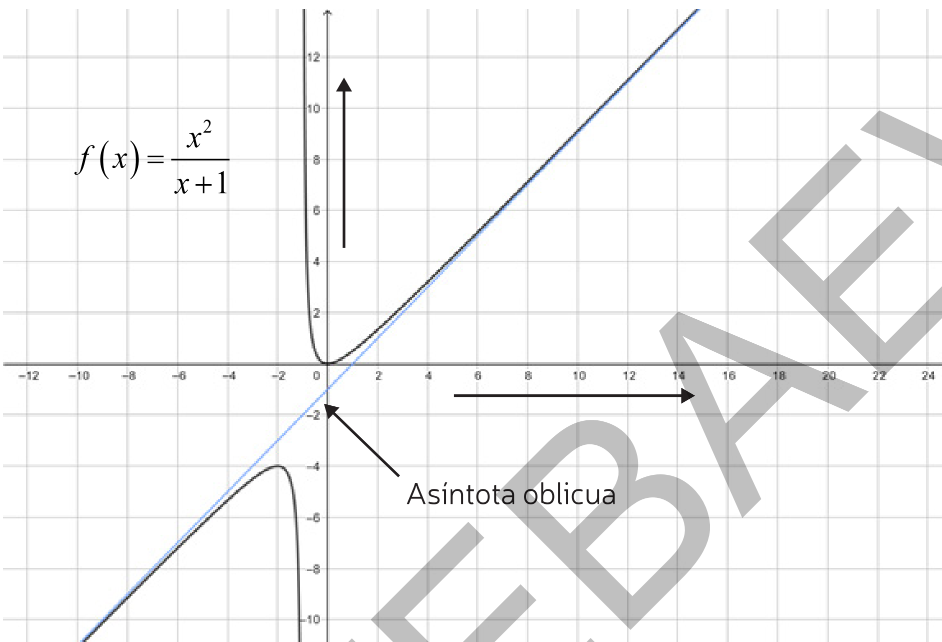
Determine $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1}$

Solución:

Dividamos el numerador y el denominador de la función entre x^2 y apliquemos la misma técnica que en los ejercicios anteriores.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{0+0}=\frac{1}{0}$$

Con lo que se llega a una indeterminación[2], entonces podemos decir que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}$ no existe. Gráficamente se observa que si $x\to+\infty$ entonces $f(x)\to+\infty$.



Ejemplo 4:

Para estudiar la velocidad a la cual aprenden los animales, un estudiante de psicología, desarrollo un experimento mediante el cual una rata fue enviada repetidamente a través de un laberinto de laboratorio. Suponiendo que el tiempo en minutos requerido por la rata para salir del laberinto en el intento número n esta aproximada por la función: $T(n)=5+\frac{20}{n}$. ¿Qué ocurre con el tiempo que tarda la rata en atravesar el laberinto a medida que aumenta el número de intentos?

[2]Indeterminación: en los límites, son las expresiones matemáticas indefinidas $\left[\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty^0, etc.\right]$ a las que se llegan cuando se sustituye la variable "x" por el número al que tiende. Algunas veces las indeterminaciones ocultan el límite de una función, pero recuerda que no debemos de quedar satisfechos con sólo sustituir el número en nuestra función para hallar el límite, pues existen otras técnicas para hallarlo tal como ya se ha visto, esto dependiendo de la función en cuestión. Finalmente, en caso, de no ser exitosos con estos métodos, intentar por el método de tabulación o apoyarnos en la gráfica de la función para afirmar con certeza la existencia o la no existencia del límite.

Solución:

Para resolver este problema lo que tenemos que buscar es: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{20}{n}\right)$
Así,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{20}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} 5+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{20}{n}\right)\\ &= 5+0\\ &= 5\end{aligned}$$

O sea que, podemos enviar a la rata repetidas veces por el laberinto, y el tiempo que empleará para salirse de dicho laberinto siempre oscilará cerca de los cinco minutos.

Ejemplo 5:

Cuando un paracaidista se somete a la acción de la gravedad sufre un aumento en su rapidez de caída, sin embargo, gracias a la resistencia que el aire ofrece, al principio es grande el cambio de rapidez, pero al paso del tiempo, el cambio en la rapidez es cada vez menor hasta que llega un momento en el que ya caerá casi con rapidez constante. Si suponemos que la rapidez del paracaidista se rige por la ecuación $v(t)=7.35\left(1-e^{-\frac{4}{3}t}\right)$ donde t es el tiempo de caída, entonces:

a) ¿Qué rapidez lleva cuando $t = 1$ segundo? y ¿cuándo $t = 5$ segundos?
b) ¿Qué pasa con la rapidez, cuando el tiempo t es muy grande?

Solución:

a) Cuando $t = 1\,s$,

$$v(1)=7.35\left(1-e^{-\frac{4(1)}{3}}\right)=7.35\left(1-e^{-\frac{4}{3}}\right)=7.35(1-0.2635)=5.41\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

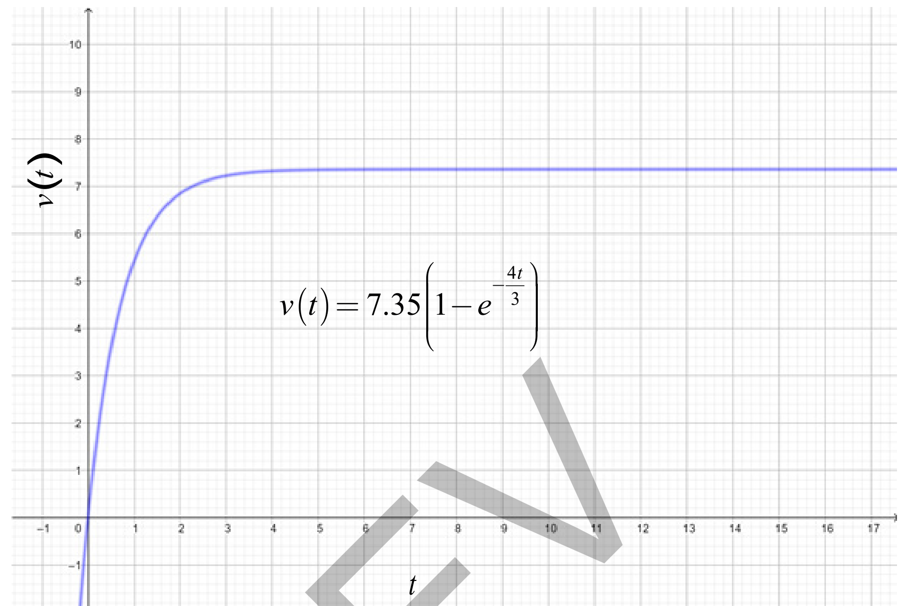
Para $t = 5\,s$,

$$v(5)=7.35\left(1-e^{-\frac{4}{3}(5)}\right)=7.35\left(1-e^{-\frac{20}{3}}\right)=7.35(1-0.0012)=7.34\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

b) Cuando t toma valores muy grandes, esto es, $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left[7.35\left(1-e^{-\frac{4t}{3}}\right)\right] &= 7.35\lim_{x\to\infty}\left(1-e^{-\frac{4t}{3}}\right)\\ &= 7.35\left[\lim_{x\to\infty} 1-\lim_{x\to\infty}\left(e^{-\frac{4t}{3}}\right)\right]\\ &= 7.35(1-0)\\ &= 7.35(1)\\ &= 7.35\ {}^{m}\!/\!{}_{s}\end{aligned}$$

Gráficamente, podemos ver cómo evoluciona la rapidez con respecto al tiempo:



¡A trabajar en tu producto esperado!

Es momento de realizar los incisos e), f) g) y h) de tu producto esperado.
A trabajar!!!.

Para fines prácticos, se puede decir que la rapidez final del paracaidista se comporta de manera constante cuando el valor de t se acerca a los 6 o 7 segundos después de haberse lanzado. Después de esos segundos la velocidad del paracaidista se estabiliza con un valor de $7.35\ {}^{m}\!/_{s}$.

Aplico lo aprendido

I. Utilizando las técnicas señaladas anteriormente para calcular límites al infini o, determina los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-x+4x^6\right)$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x+1}{2x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-38x-1}{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{7}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7}{x-4}$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-2}{x-3}$

Aplico lo aprendido

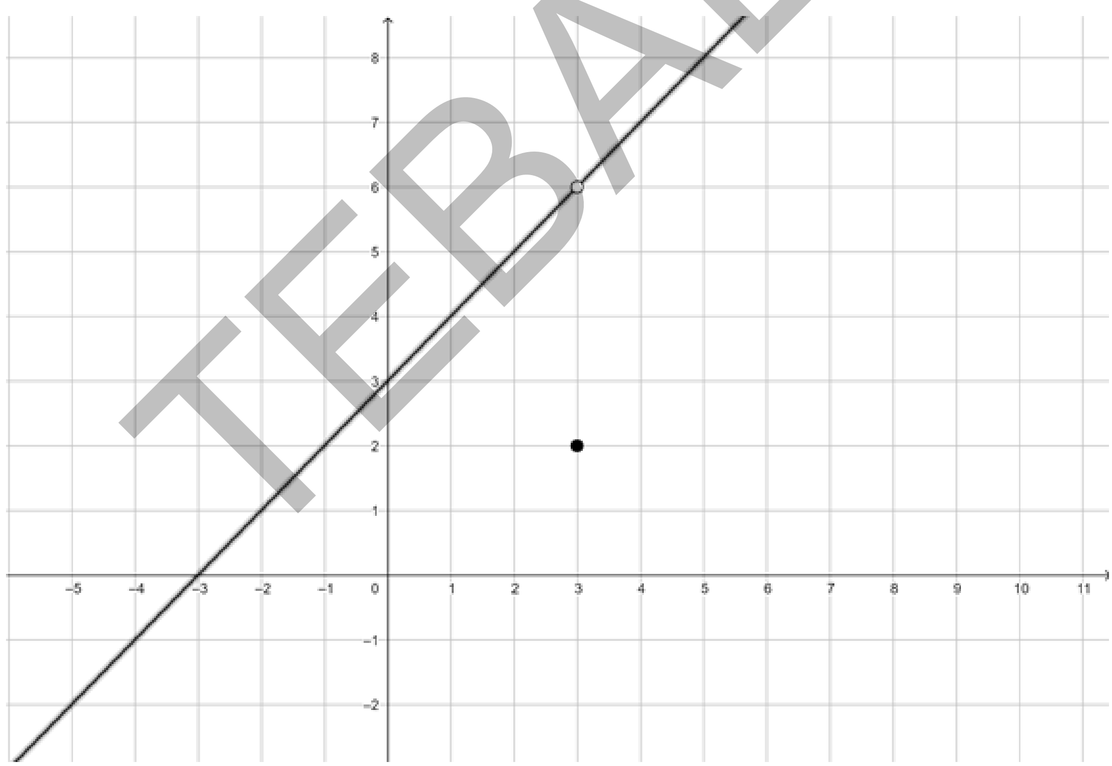
Responde correctamente cada una de las siguientes situaciones acerca de límites de funciones. El trabajo lo puedes realizar en binas. Al final expongan a sus compañeros de grupo sus resultados.

1. El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$. A partir de su gráfica conte te los siguientes incisos:

a) De acuerdo a la gráfica, ¿cómo queda definida la funció $f(x)$? **Sugerencia:** la tienes que definir por partes, ya que la función no es continua.

b) ¿Cuáles son los valores de $f(-3)$, $f(0)$ y $f(3)$?

c) ¿Cuáles son los valores de $\lim_{x\to -3} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 3} f(x)$?



2. Una empresa deposita una cierta cantidad de capital en un banco a plazo fijo. Al cabo de t años el monto a recuperar viene dado por la siguiente función:

$$C(t) = \frac{15625}{\left(1+4e^{-2t}\right)}$$

a) ¿Qué cantidad depositó el gerente de la empresa en el banco?
b) ¿Qué ocurre con el capital cuando pasan muchos años?

c) ¿Cuánto tiene que esperar para retirar 15600?
d) ¿Merece la pena esperar más tiempo?

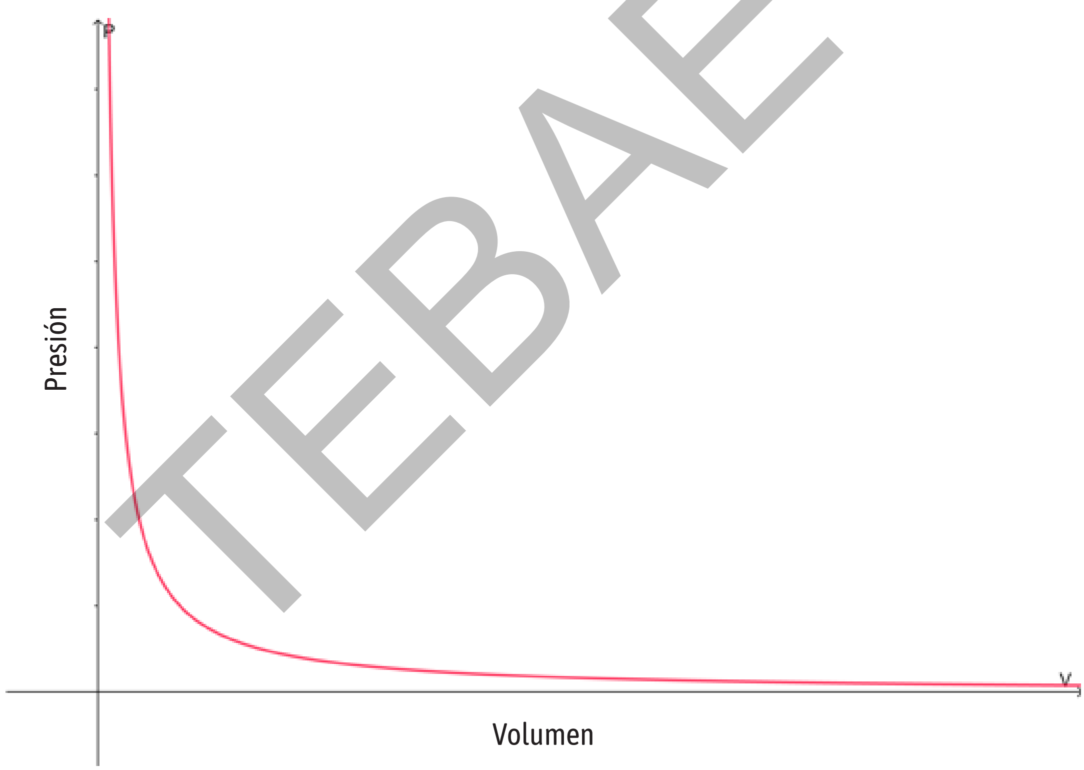
3. Cierta función de costos se define como $C(x)=\dfrac{4x^2-100}{x-5}$ para $x \neq 5$, en donde x representa el número de artículos producidos y C es el costo de producción (en miles de dólares). Hallar cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 5} C(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 3} C(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} C(x)$

4. Para una cantidad de gas a una temperatura constante, la presión es inversamente proporcional al volumen V. ¿Cuál es el límite de P conforme V se aproxima a cero desde la derecha? Interpreta el resultado, tomando en cuenta la gráfica



5. De acuerdo a la teoría de la relatividad, la masa m de una partícula depende de su velocidad v. Calcula el límite de la masa m, cuando v tiende a c desde la izquierda. Para ello, considera:

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Dónde m: es la masa a cierta velocidad, m_o: es la masa de la partícula en reposo, v: la velocidad a la que va la masa y c: la velocidad de la luz ($c = 279,792,458\ {}^{m}\!/_{s}$).

6. Se estima que la población de un virus que ha llegado al planeta tierra evoluciona siguiendo el modelo $f(t)=\dfrac{240+20t}{16+t}$ (en miles), donde t indica los años transcurridos desde su aparición en 2020.

a) ¿Qué población tenía en el año de su aparición?
b) ¿Qué población tendrá en 2022?
c) ¿A largo plazo la población se estabilizará? Es decir, ¿ya no crecerá?

7. Dada la función $f(x)=x^4-2x^3+5x^2-x+3$ determina el límite, cuando:

a) $x \to -4$
b) $x \to 0$
c) $x \to 50$
d) $x \to -5$
e) $x \to 15$

8. Halla los siguientes límites sobre funciones trascendentes:

1. $\lim\limits_{x\to 9}(\ln(x+3))$
2. $\lim\limits_{x\to 5}(e^{x+3})$
3. $\lim\limits_{x\to 20}(x-\log x)$
4. $\lim\limits_{x\to -9}(7)^{x+9}$
5. $\lim\limits_{x\to \pi}(2\cos(x)+1)$
6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(2\cos(x)-3sen(x))$